Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Phase finale
$3^{\text{ème}}$ tour

Niveau 7C

19 mars 2017
Durée 4 h

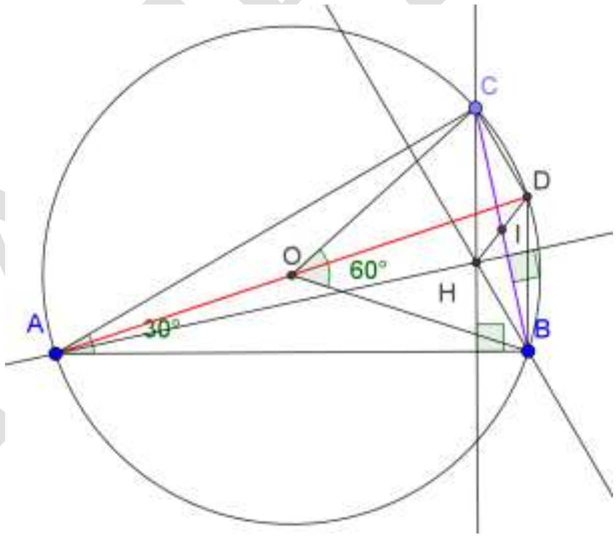
Solution

proposée par AMIMATHS

Exercice 1 (4 points)

Soit ABC un triangle acutangle (à angles aigus) tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et H son orthocentre. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par D le symétrique de H par rapport à I.
Montrer que $AD=2BC$.

Une correction



On remarque que $BDCH$ est un parallélogramme, donc $(BD)\parallel(CH)$ et $(CD)\parallel(BH)$.

Comme H est l'orthocentre de ABC alors $(AB)\perp(CH)$ d'où $(AB)\perp(BD)$.

De même $(BH)\perp(AC)\Rightarrow(CD)\perp(AC)$.

On en déduit que les triangles ACD et ABD sont rectangles de même hypoténuse $[AD]$ donc les points A,B,C et D sont cocycliques. Le centre du cercle Γ circonscrit aux points A,B,C et D est le milieu O de $[AD]$. D'autre part l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ est le double de l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Comme $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ alors $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On trouve que $\begin{cases}\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ OB=OC\end{cases}$ ce qui veut dire que le triangle OBC est équilatéral.

Or $OA=OB=OC=OD=r$, où r est le rayon de Γ. On a donc $\begin{cases}BC=OC=OB=OD=r\\ OD=\frac{1}{2}AD\end{cases}\Rightarrow AD=2BC$.

Exercice 2 (4 points)

Un commerçant effectue trois remises successives sur un boubou dont le prix initial était de 30000 Ouguiyas et le vend finalement 22287 Ouguiyas. Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières distinctes ? On donne : $742900=17\times19\times23\times2^2\times5^2$.
.

Une correction

Soient a; b; c les trois pourcentages tels que $a<b<c$. On a donc :

$$30000\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\left(1-\frac{c}{100}\right)=22287$$

$$\Leftrightarrow\ 3(100-a)(100-b)(100-c)=2228700$$

$$\Leftrightarrow(100-a)(100-b)(100-c)=742900$$

$$\Leftrightarrow(100-a)(100-b)(100-c)=17\times19\times23\times2^2\times5^2.$$

Les entiers $(100-a)$, $(100-b)$ et $(100-c)$ sont tous les trois inférieurs à 100.

On a $100-c<100-b<100-a<100$. Donc $(100-a)\ (100-b)\ <10000$, d'où $(100-a)\ (100-b)\ (100-c)\ \le\ 10000(100-c)$, et par conséquence $742900\le 10000(100-c)\Rightarrow 74.29\le 100-c$.

Il en est de même pour les entiers $(100-a)$ et $(100-b)$.

D'où les entiers $(100-a)$, $(100-b)$ et $(100-c)$ sont tous supérieurs ou égaux à 75.

Soient x_1, x_2 et x_3 respectivement ces trois entiers.

Comme $17\times 19>100$ d'où l'existence des entiers p,q,p',q',p'' et q'' tels que $x_1=17\times 2^p\times 5^q$, $x_2=19\times 2^{p'}\times 5^{q'}$ et $x_3=23\times 2^{p''}\times 5^{q''}$ avec $p+p'+p''=2$ et $q+q'+q''=2$.

$75\le x_1\le 100 \Leftrightarrow \dfrac{75}{17}\le 2^p\times 5^q\le\dfrac{100}{17}$ d'où $4,4\le 2^p\times 5^q\le 5,9$ donc $2^p\times 5^q=5$.

On en déduit que $p=0$ et $q=1$ et que $x_1=17\times 5$.

On a aussi $\dfrac{75}{23}\le 2^{p''}\times 5^{q''}\le\dfrac{100}{23}$, d'où $3,2\le 2^{p'}\times 5^{q'}\le 4,3$. Donc $2^{p''}\times 5^{q''}=4$. On en déduit que $p''=2$ et $q''=0$ et que $x_3=23\times 4$.

Or en remplaçant dans $p+p'+p''=2$ et $q+q'+q''=2$ on trouve $p'=0$ et $q'=1$, on en déduit que $x_2=19\times 5$.

Comme $100-c<100-b<100-a<100$, on a alors :

$100-a=17\times 5=85\Rightarrow a=15$,

$100-b=19\times 5=95\Rightarrow b=5$, et

$100-c=23\times 4=92\Rightarrow c=8$.

Remarquons que $(100-a)\ (100-b)\ (100-c)=\left(\underbrace{17\times 5}_{<100}\right)\times\left(\underbrace{19\times 5}_{<100}\right)\times\left(\underbrace{23\times 4}_{<100}\right)$.

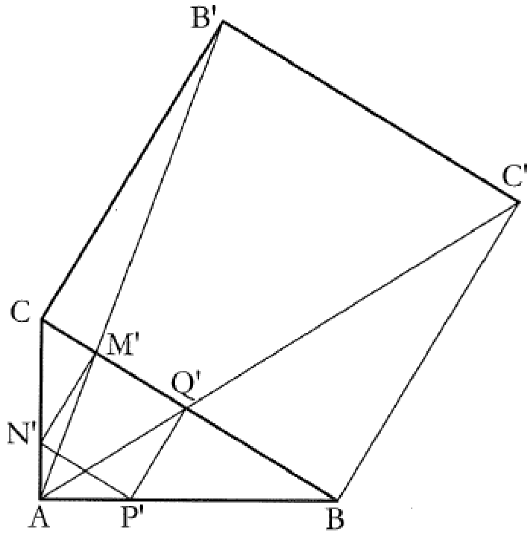
Enfin les pourcentages des trois remises appliquées sont 15%, 5% et 8% (l'ordre n'est pas important)

<u>Exercice 3 (4 points)</u>

Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. On veut construire deux carrés inscrits dans ce triangle : Le premier ayant A pour sommet et le second ayant un côté porté par l'hypoténuse.

1) Construire les deux cas de figure en expliquant les étapes de la construction.

2) Exprimer les côtés x et y de ces deux carrés en fonction de b et c puis comparer leurs aires.



<u>Une correction</u>

1) Construction des deux cas de figure

- <u>1er cas</u> : on utilise la bissectrice intérieure de l'angle $B\hat{A}C=\dfrac{\pi}{2}$ (voir figure). Les triangles AMN et APN sont rectangles et isocèles respectivement en M en P.

- <u>2^{ième} cas</u> : on utilise le carré extérieur $BCB'C'$ de côté BC et l'homothétie de centre A et qui transforme B' en M' et C en Q' (voir figure). Le carré $BCB'C'$ est transformé en $M'N'P'Q'$.

2) a) Calcul de x et y

*** Calcul de x : l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles PNC, MBN et celle du carré $AMNP$ on a donc : $\dfrac{bc}{2}=\dfrac{(b-x)x}{2}+\dfrac{(c-x)x}{2}+x^2$ d'où $x=\dfrac{bc}{b+c}$.**

*** Calcul de y : l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles $AP'N'$, $P'BQ'$, $N'M'C$ et celle du carré $N'P'Q'M'$. Les triangles $AP'N'$ est l'image de ABC par l'homothétie donc $\text{aire}(AP'N') = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \times \text{aire}(ABC)$. Les triangles $P'BQ'$ et $N'M'C$ ont la même hauteur donc**

$\text{aire}(P'BQ') + \text{aire}(N'M'C) = \frac{1}{2}y(CM' + Q'B) = \frac{1}{2}y(a-y)$ donc $\frac{bc}{2} = \frac{bc}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}y(a-y) + y^2$.

$\frac{bc}{2} = \frac{bc}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}y(a-y) + y^2 \Leftrightarrow (bc+a^2)y^2 + a^3y - a^2bc = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{bc}{a^2}+1\right)y^2 + ay - bc = 0$. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4bc\left(\frac{bc}{a^2}+1\right) = \frac{a^4 + 4a^2bc + 4(bc)^2}{a^2} = \left(\frac{a^2+2bc}{a}\right)^2 = \left(\frac{(b+c)^2}{a}\right)^2$. L'équation admet deux solutions, dont la seule solution positive est $y = \frac{-a + \frac{(b+c)^2}{a}}{2\left(\frac{bc}{a^2}+1\right)} = \frac{abc}{a^2+bc}$.

b) Comparaison des aires des deux carrés :

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 - \left(\frac{abc}{a^2+bc}\right)^2 = \left(\frac{bc}{(b+c)(a^2+bc)}\right)^2\left[(a^2+bc)^2 - (a(b+c))^2\right] \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{bc}{(b+c)(a^2+bc)}\right)^2\left[a^4 + 2a^2bc + (bc)^2 - a^2(b^2+c^2+2bc)\right] \Rightarrow$$

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{bc}{(b+c)(a^2+bc)}\right)^2\left[a^4 + 2a^2bc + (bc)^2 - a^2(a^2+2bc)\right] \Rightarrow x^2 - y^2 = \left(\frac{(bc)^2}{(b+c)(a^2+bc)}\right)^2 > 0$$

Donc l'aire du carré ayant A pour sommet est supérieure à celle du carré ayant un côté porté par l'hypoténuse.

<u>Exercice 4 (4 points)</u>

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12 321). S'ils sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14$^{\text{ième}}$ nombre palindrome.

1) Quel est le 5$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

2) Quel est le 20$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.

4) Un jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres. Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

Quelle peut bien être la combinaison choisie par le savant ?

<u>Une correction</u>

Liste des premiers nombres palindromes :

9 nombres palindromes à 1chiffres : $1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;\ \underbrace{5}_{5\text{ième}}\ ;6\ ;7\ ;8\ ;9 \leftarrow 9$ ième

9 nombres palindromes à 2 chiffres : $11\ ;22\ ;33\ ;44\ ;55\ ;66\ ;77\ ;88\ ;99 \leftarrow 18$ ième

$$\text{90 nombres palindromes à 3 chiffres:}\begin{cases} \underset{19\text{ième}}{101}\ ;111\ ;121\ ;\cdots;191\ (28\text{ ième}) \to 10\text{ nombres} \\ 202\ ;212\ ;222\ ;\cdots;292\ (38\text{ ième}) \to 10\text{ nombres} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 909\ ;919\ ;929\ ;\cdots;\ \underset{108\text{ième}}{999}\ \ (108\text{ ième}) \to 10\text{ nombres} \end{cases}$$

Donc :

1) le $5^{\text{ème}}$ nombre palindrome est 5.

2) Le $20^{\text{ème}}$ nombre palindrome est 111

3) le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres est 19 et celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres est 108

4) L'énoncé admet l'existence et l'unicité de la solution.

On peut tout d'abord essayer de dénombrer les nombres palindromes qui nous intéressent.

oIl existe 9 nombres entiers (1, 2, . . . , 9) qui sont les premiers. Puis viennent les nombres palindromes à deux chiffres, faciles à trouver comme 11, 22, . . . , 99. Il en existe 9. Puis viennent ceux dont l'écriture possède trois chiffres, comme 101, ou bien 242. Ils ont le même chiffre des centaines et des unités. Comme on ne peut pas prendre 0, il reste 9 possibilités couplées avec les 10 cas différents du chiffre des dizaines, soit 90 nombres palindromes à trois chiffres.

Les nombres palindromes à quatre chiffres ont les chiffres des milliers et des unités identiques, mais aussi les mêmes chiffres des centaines et des dizaines. C'est le cas de 3223, ou bien de 6776. Ils sont faciles à dénombrer, puisqu'il suffit de s'intéresser aux deux derniers chiffres. Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas utiliser 0 comme chiffre des unités, ce qui laisse 90 cas différents.

$$\text{90 nombres palindromes à 4chiffres:}\begin{cases} 1001\ ;1111\ ;1221\ ;\cdots;1991 \to 10\text{ nombres} \\ 2002\ ;2112\ ;2222\ ;\cdots;2992 \to 10\text{ nombres} \\ \vdots \\ 9009\ ;9119\ ;9229\ ;\cdots;9999 \to 10\text{ nombres} \end{cases}$$

Nombres palindromes	de 1 à 9	de 11à 99	de 101à 999	de 1001à 9999
Effectifs	9	9	90	90
Effectifs cumulés	9	18	108	198

Finalement, les nombres qui nous intéressent sont les nombres palindromes de 1001 à 9999, c'est-à-dire ceux qui sont situés entre les places 109 et 198.

D'après l'énoncé, il faut que ces nombres palindromes soient multiples de 22.

Comme $22=2\times11$, on recherche des multiples de 2 et de 11. Or, tout nombre palindrome est multiple de 11. Cela ne constitue donc pas un critère de choix. (En effet, soit $\overline{abba}$ un nombre palindrome à quatre chiffres,

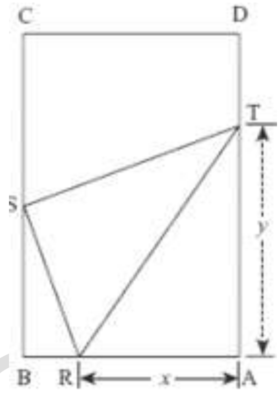
on a : $1000a+\ 100b+\ 10b+a=\ 1001a+\ 110b=11\times(91a+10b)$.

Par ailleurs, les multiples de 2 se reconnaissent à leur terminaison, qui est 0, 2, 4, 6, ou 8. On a vu qu'il n'existait pas de nombre palindrome à quatre chiffres se terminant par zéro, donc la liste des éventualités est réduite ici à 40 nombres.

Il suffit maintenant de lister les possibilités. Il existe 10 nombres palindromes se terminant par 2. Le premier 2002 porte le numéro 119 dans le classement, alors que le dernier 2992 porte le numéro 128.

Comme $119\times22\ =\ 2618>2002$ et comme $128\times22\ =\ 2816<2992$. Alors le nombre cherché est compris entre 2002 et 2992. C'est-à-dire l'un des nombres 2002 ; 2112 ; 2222,2332 ; 2442 ; 2552 ;2662 ;2772 ;2882 ou 2992, dont les rangs sont 119, 120, …, 128.En faisant le rapport de chacun de ces nombres par son rang, on trouve que le seul qui donne 22 est le 2772 qui est situé au $126^{\text{ème}}$ rang dans la liste.

Exercice 5 (4 points)



Soit ABCD une feuille rectangulaire de largeur $AB=4$ et de longueur $BC=6$. Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre : Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille). On pose $AR=x$ et $AT=y$.

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.

2) Trouver une relation entre x et y quand S se déplace sur [BC].

3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle SRT est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST?

Une correction

1) La valeur maximale de x est évidemment 4, dans ce cas on aura aussi $y=4$. Si $S\in[BC]$ alors ASB est rectangle en B, d'où $AS\geq AB=4$, donc il faut que $AS\geq 4$. En plus le triangle ARS est isocèle en R alors d'après l'inégalité triangulaire on a $4\leq AS\leq 2x$ donc $x\geq 2$. Il faut que T soit sur le segment $[AD]$ donc la valeur minimale de x est obtenue lorsque T est en D.

Comme ART et SRT sont deux triangles rectangles de même hypoténuse alors les points A,R,S et T sont cocycliques. D'où $\left(\overrightarrow{TR},\overrightarrow{TA}\right)=\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{SA}\right)$.

Puisque (RT) est la médiatrice de $[AS]$ alors (RT) est une bissectrice intérieure de l'angle ARS.

D'où $\left(\overrightarrow{SR},\overrightarrow{SA}\right)=\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AR}\right)=\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right)$. Donc $RTA=BAS=\alpha$. Calculons la tangente de α de deux manières. Dans le triangle rectangle ART, on a $\tan\alpha=\frac{AR}{AT}=\frac{x}{y}$ et dans le triangle rectangle ASB on a $\tan\alpha=\frac{SB}{AB}=\frac{SB}{4}$. D'où $\frac{x}{y}=\frac{SB}{4}$. Dans le cas particulier où $T=D$, on a $y=6$ et d'après le théorème de Pythagore, $SB=6-\sqrt{20}$. On obtient ainsi la valeur minimale $x=9-3\sqrt{5}$.

2) La relation précédemment établie permet de trouver une relation entre x et y car : $BR=4-x$, $SR=x$ et comme le triangle SBR est rectangle en B alors $SB^2=SR^2-BR^2=x^2-(4-x)^2=8x-16$ et $SB=2\sqrt{2x-4}$. Puis que $\frac{x}{y}=\frac{SB}{4}$, on en déduit que $y=\frac{4x}{SB}=\frac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3) L'aire de AST est $\frac{1}{2}xy=\frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$. Soit $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$.

Etudions les variations de f sur $I=\left[9-3\sqrt{5},4\right]$. La fonction f est dérivable sur I et

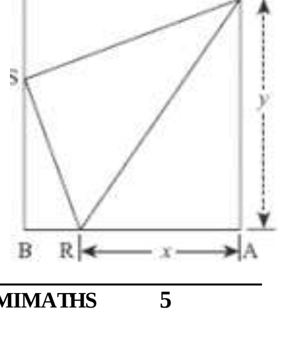
$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{2x-4}-\frac{2}{2\sqrt{2x-4}}x^2}{2x-4}=\frac{x(3x-8)}{(2x-4)\sqrt{2x-4}}.$$

$f'(x)$ est du signe de $3x-8$, qui s'annule pour $x=\frac{8}{3}$. On a $\frac{8}{3}\in I$ d'où le tableau de variations de f.

x	$9-3\sqrt{5}$		$\frac{8}{3}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{8}{3}\right)$	$\nearrow$	

La valeur minimale de l'aire du triangle AST est $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

Notons dans ce cas que $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$ ce qui signifie que le triangle AST est équilatéral.



Fin.