# Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

**Sélections régionales**
**1er tour**

**Niveau 7C**

**20 janvier 2019**
**Durée 3 h**

# Solution

**proposée par AMIMATHS**

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;*
*Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;*
***Calculatrice non autorisée***



**<u>Exercice 1 :</u> (20 points)**

**Soit A un point d'un cercle $\Gamma$ de centre O et de rayon R.**
**Soit $\Gamma'$ un cercle de centre A qui rencontre $\Gamma$ en P et Q.**
**M un point de $\Gamma'$ distinct de P et Q tel que $(MP)$ recoupe $\Gamma$ en B et $(MQ)$ recoupe $\Gamma$ en D. On cherche à démontrer par deux méthodes que : $(BD)\perp(AM)$.**

**1° <u>Méthode</u> 1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.**

**a) Soit $\Delta_M$ une droite quelconque passant par M qui coupe $\Gamma$ en E et F. Placer $E'=S_O(E)$ et montrer que $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=OM^2-R^2$ (ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport à $\Gamma$).**

**b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MD}$ ?**

**c) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$**

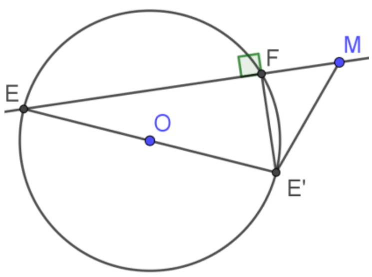
**2° <u>Méthode</u> 2 : Angles orientés**

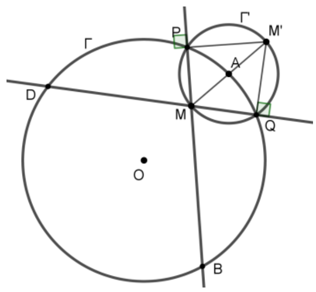
**a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$**

**b) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$**

**<u>Solution</u>**

**1° <u>Méthode1</u> : Puissance d'un point par rapport à un cercle.**




**On a :**

$$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{ME'}=OM^2-\frac{EE'^2}{4}=OM^2-R^2.$$

**Comme ce nombre est indépendant de la droite $\Delta_M$, alors**

$$\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MD}=OM^2-R^2.$$

**Soit $M'=S_A(M)$, on a :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DB}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}.\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MD}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MD}\right)\\&=0\end{aligned}$$

D'où **les droites $(DB)$ et $(AM)$ sont perpendiculaires.**

| **<u>Barème :</u>** | |
|---|---|
| **1° a)** | **3** |
| **b)** | **3** |
| **c)** | **3** |
| **2° a)** | **4** |
| **b)** | **5** |
| **Présentation, rédaction et idées** | **2** |

2° <u>Méthode</u> 2 : Angles orientés

a)On remarque que AMQ est un triangle isocèle donc $\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QM}\right)[\pi]$ et comme la somme des angles orientés d'un triangle est égale à $\pi$ alors $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$

b) On a:

$$2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DM}\right)+2\left(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{MA}\right)=2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=2\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=2\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$$

D'où $2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=\pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$. Donc les droites $(DB)$ et $(AM)$ sont perpendiculaires.

## <u>Exercice 2 ;</u> (20 points)

Soit le nombre : $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1° Calculer $X^3$

2° Montrer que $X$ est un entier naturel que l'on déterminera.

### <u>Solution</u>

1° $X^3=18+3\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$

2° On remarque que $\Rightarrow X^3=18+3X$. Alors $X^3-3X-18=0$ Avec

$X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\geq\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\geq\sqrt[3]{8}=2\Rightarrow X\geq 2$

Soit $f(x)=x^3-3x-18$, $\forall x\geq 2$. $f'(x)=3x^2-3\geq 9>0$ donc f est continue et strictement croissante sur $[2;+\infty[$ alors c'est une bijection de cet intervalle sur son image qui est $[-16;+\infty[$.

D'où l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2;+\infty[$.

Or $f(3)=0$, donc 3 est la seule solution de cette équation . On en déduit donc que $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$.

<u>Barème :</u>

| | |
|---|---|
| 1° Calcul de $X^3$ | 4 |
| 2° Relation $X^3$, X | 4 |
| Introduction de f | 2 |
| Etude de f | 2 |
| Unicité de x tel que $f(x)=0$ | 2 |
| Valeur X = 3 | 4 |
| Présentation, rédaction et idées | 2 |

## <u>Exercice 3 :</u> (20 points)

1° Soit $A=p^2(2p+1)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de A par 10.

2° Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+...+n^3$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Quel est le chiffre des unités de $S_{2018}$ ?

c) Quel est le chiffre des unités de $\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$ ?

### <u>Solution</u>

1° Soit $A=p^2(2p+1)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminons les restes possibles de la division de A par 10.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| reste de p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| reste de 2p+1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| reste de p² | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |
| reste de (2p+1)² | 1 | 9 | 5 | 9 | 1 | 1 | 9 | 5 | 9 | 1 |
| Reste de A | 0 | 9 | 0 | 1 | 6 | 5 | 4 | 5 | 6 | 1 |

Alors les restes possibles de la division de A par 10 sont : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.

2° a) Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3$. Montrons par récurrence que

$$S_n=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$$

| Barème : | |
|---|---|
| 1° | 5 |
| 2°a) | 5 |
| b) | 4 |
| c) | 4 |
| Présentation, rédaction et idées | 2 |

On a $S_1=1^3=1=\frac{1^2\times2^2}{4}$, donc la proposition est vraie pour $n=1$

Supposons que $S_n=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$, or

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+\left(n+1\right)^3=S_n+\left(n+1\right)^3\Rightarrow$$

$$S_{n+1}=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}+\left(n+1\right)^3=\frac{\left(n+1\right)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}=\frac{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}{4}.$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}$

b) On a $S_{2018}=\sum_{k=1}^{2018}k^3=\frac{2018^2\times2019^2}{4}=1009^2\times2019^2=p^2\left(2p+1\right)^2$ avec $p=1009$ et d'après le tableau de congruence de la question 1° on a le dernier chiffre de $S_{2018}$ est 1.

c) D'après a) on a $S_{2019}=\sum_{k=1}^{2019}k^3=\frac{2019^2\times2020^2}{4}=2019^2\times1010^2=\left(2019\times1010\right)^2$ donc

$$\frac{S_{2019}}{900}=\left(\frac{2019\times1010}{30}\right)^2=\left(673\times101\right)^2$$

Or $\begin{cases}673\equiv3\ [10]\\101\equiv1\ [10]\end{cases}\Rightarrow673\times101\equiv3[10]\Rightarrow\left(673\times101\right)^2\equiv9[10]\Rightarrow\left(673\times101\right)^2\equiv-1[10].$

D'où $\frac{S_{2019}}{900}\equiv-1[10]\Rightarrow\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}\equiv\left(-1\right)^{2019}[10]\Rightarrow\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}\equiv-1[10]\Rightarrow\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}\equiv9[10]$

D'où le chiffre des unités de $\left(\frac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$ est $9$.

## Exercice 4 : (20 points)

Soient $n$ un entier naturel non nul et $\alpha$ un réel.

1° Résoudre le système $\begin{cases}u^n+v^n=2\sin\alpha\\uv=1\end{cases}$, où $u$ et $v$ sont des nombres complexes.

2° Résoudre le système $\begin{cases}(z_1+iz_2)^n+(z_1-iz_2)^n=2\sin\alpha\\z_1^2+z_2^2=1\end{cases}$, où $z_1$ et $z_2$ sont des nombres complexes.

**Solution**

1) $v=\frac{1}{u}\Rightarrow u^n+\frac{1}{u^n}=2\sin\alpha\Rightarrow u^{2n}-2u^n\sin\alpha+1=0$

C'est une équation du 2nd degré en $u^n$, on a $\Delta'=\sin^2\alpha-1=\left(i\cos\alpha\right)^2$ d'où

$u^n=\sin\alpha-i\cos\alpha=e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$ ou $u^n=\sin\alpha+i\cos\alpha=e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$.

| **Barème :** | |
|---|---|
| **1°) Elimination** | **4** |
| **Equation 2nd degré** | **2** |
| **Valeurs (u,v)** | **2** |
| **2°) Changement de variable** | **4** |
| **Valeurs ($z_1, z_2$)** | **6** |
| **Présentation, rédaction et idées** | **2** |

**Or** $\left(u^n = e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}\right)$ **et** $\left(u^n = e^{-i(\alpha-\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}\right)$ **avec k un entier prenant les valeurs de 0 à n-1.**

**Donc les solutions sont** $\begin{cases} u = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \\ v = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} u = e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \\ v = e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} (z_1+iz_2)^n + (z_1-iz_2)^n = 2\sin\alpha \\ {z_1}^2 + {z_2}^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (z_1+iz_2)^n + (z_1-iz_2)^n = 2\sin\alpha \\ (z_1+iz_2)(z_1-iz_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^n + v^n = 2\sin\alpha \\ uv = 1 \end{cases}$

**avec** $z_1 + iz_2 = u$ **et** $z_1 - iz_2 = v \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(u+v)$ **et** $z_2 = \frac{1}{2i}(u-v)$.

**D'où**

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} + e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \\ z_2 = \dfrac{e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} - e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2i} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} + e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2} \\ z_2 = \dfrac{e^{-i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})} - e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n})}}{2i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \cos(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n}) \\ z_2 = \sin(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z_1 = \cos(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n}) \\ z_2 = -\sin(\frac{\alpha}{n}+\frac{(4k-1)\pi}{2n}) \end{cases} \text{ avec } k \in \{0;1;2;...;n-1\}$$

## Exercice 5 : (20 points)

**On considère la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ **où a est un réel non nul. On se propose de déterminer les réels** $x_n$ **et** $y_n$ **tels que** $A^n = x_nA + y_nI_2$**, où** $I_2$ **est la matrice unité d'ordre 2.**

**1° Calculer** $A^2$ **et** $A^3$**.**

**2° Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ **et** $y_{n+1} = -2x_n$**.**

**3° Démontrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2$**.**

**4° Déterminer la matrice inverse de** $A^{2019}$**.**

**Solution**

**1°** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7a & 8 \end{pmatrix}$

**2° On remarque que** $A^2 = 3A - 2I_2$ **et**

$A^3 = A \times (3A - 2I_2) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I_2) - 2A = 7A - 6I_2$

**On sait que** $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ **et** $\begin{cases} x_1 = 1 = 3x_0 + y_0 \\ y_1 = 0 = -2x_0 \end{cases}$ **en plus** $A^2 = 3A - 2I_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 = 3x_1 + y_1 \\ y_2 = -2 = -2x_1 \end{cases}$

**Comme** $A^n = x_nA + y_nI_2$ **alors**

$A^{n+1} = A^n \times A = (x_nA + y_nI_2)A = x_nA^2 + y_nA = x_n\left(3A - 2I_2\right) + y_nA = (3x_n + y_n)A - 2x_nI_2$

Or $A^{n+1} = x_{n+1}A + y_{n+1}I_2$ , d'où $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = -2x_n$ .

3° Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}$

On a $\begin{cases} x_0 = 0 = 2^0 - 1 \\ y_0 = 2 - 2^0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 = 1 = 2^1 - 1 \\ y_1 = 0 = 2 - 2^1 \end{cases}$.

La proposition est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

Supposons que $\begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}$ on a alors

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n = 3\left(2^n - 1\right) + 2 - 2^n = 2^{n+1} - 1 \\ y_{n+1} = -2x_n = -2\left(2^n - 1\right) = 2 - 2^{n+1} \end{cases}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = 2^n - 1 \\ y_n = 2 - 2^n \end{cases}$. Ce qui montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2$ .

4° D'après 3° on a

$$A^n = \left(2^n - 1\right)A + \left(2 - 2^n\right)I_2 \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 0 \\ \left(2^n - 1\right)a & 2\left(2^n - 1\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^n - 1\right)a & 2^n \end{pmatrix}$$

On a $\det A^n = 2^n$ donc $A^n$ est inversible soit $B_n$ sa matrice inverse on a :

$$B_n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ \left(1 - 2^n\right)a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^{-n} - 1\right)a & 2^{-n} \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de $A^{2019}$ est donc la matrice $B_{2019} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(2^{-2019} - 1\right)a & 2^{-2019} \end{pmatrix}$ .

**Barème :**

| | |
|---|---|
| 1°) Calcul de $A^2, A^3$ | 4 |
| 2°) Relations $A^2$ et A; $A^3$ et A | 2 |
| Relations $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ , $y_{n+1} = -2x_n$ | 4 |
| 3° | 4 |
| 4° | 4 |
| Présentation, rédaction et idées | 2 |

Fin.