Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales **1er tour**	**Niveau 4AS**	**28 janvier 2018** **Durée 3 h**

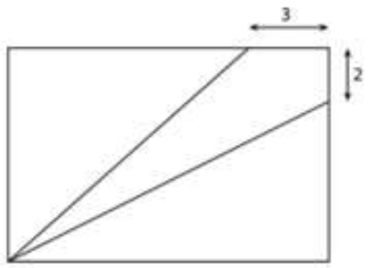
Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (25 points)

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessous, sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire ?

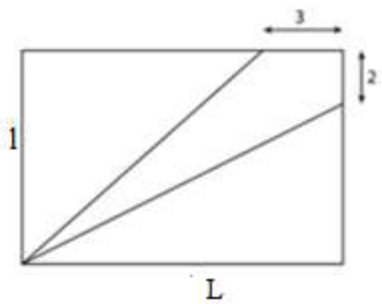


Solution

Soit L et l les dimensions de ce rectangle.

On alors L et l sont deux réels strictement positifs ($L>0$ et $l>0$) qui vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{(L-3)\times l}{2}=\dfrac{L\times l}{3} \\ \dfrac{(l-2)\times L}{2}=\dfrac{L\times l}{3} \end{cases}$$



En simplifiant on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{(L-3)}{2}=\dfrac{L}{3} \\ \dfrac{(l-2)}{2}=\dfrac{L}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(L-3)=2L \\ 3(l-2)=2L \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} L=9 \\ l=6 \end{cases}$

Barème :	
Mobilisation minimale des acquis	**2**
Choix d'inconnues :	**3**
Mise en équation :	**10**
Résolution du système :	**5**
Vérification :	**3**
Présentation + idées	**2**

Le rectangle a pour dimensions : longueur $L=9$ et largeur $l=6$.

L'aire du rectangle : $L\times l=9\times 6=54$ unité d'aire.

L'aire du triangle supérieur : $\dfrac{(L-3)\times l}{2}=\dfrac{6\times 6}{2}=18$. C'est le tiers du celle du rectangle.

L'aire du triangle inférieur : $\dfrac{(l-2)\times L}{2}=\dfrac{4\times 9}{2}=18$. C'est le tiers du celle du rectangle.

L'aire du morceau entre les deux triangles est le reste. C'est donc le tiers du celle du rectangle.

Chacun des trois morceaux a pour aire 18 unité d'aire.

Exercice 2 ; **(25 points)**

1) Comparer les nombres $A=\dfrac{1+5x}{1+7x}$ et $B=\dfrac{1+2x}{1+4x}$, où x est un réel strictement positif.

2) En déduire une comparaison des nombres X et Y tels que $X=\dfrac{\overbrace{555\cdots55}^{2018\text{fois}}6}{\underbrace{777\cdots77}_{2018\text{fois}}8}$ et $Y=\dfrac{\overbrace{222\cdots22}^{2018\text{fois}}3}{\underbrace{444\cdots44}_{2018\text{fois}}5}$.

Solution

1) Pour comparer les nombres $A=\dfrac{1+5x}{1+7x}$ et $B=\dfrac{1+2x}{1+4x}$, où x est un réel strictement positif.

On calcule leur différence :

$$A-B=\frac{1+5x}{1+7x}-\frac{1+2x}{1+4x}$$

$$=\frac{(1+5x)(1+4x)-(1+2x)(1+7x)}{(1+7x)(1+4x)}$$

$$=\frac{\left(1+4x+5x+20x^2\right)-\left(1+7x+2x+14x^2\right)}{(1+7x)(1+4x)}$$

$$A-B=\frac{1+4x+5x+20x^2-1-7x-2x-14x^2}{(1+7x)(1+4x)}$$

$$=\frac{6x^2}{(1+7x)(1+4x)}$$

$A-B>0$. Donc $A>B$

Barème :	
Mobilisation minimale des acquis	**2**
1) Considération de A-B ou $\frac{A}{B}$ ...:	**3**
Calcul et simplification .... :	**5**
Démonstration $A>B$:	**5**
2) Considération de $x=\underbrace{11\cdots1}_{2018\text{ fois}}$:	**4**
Lien entre (X,Y) et (A,B) :	**2**
Démonstration que $X>Y$:	**2**
Présentation + idées	**2**

2) Comparaison des nombres X et Y tels que $X=\dfrac{\overbrace{555\cdots55}^{2018\text{fois}}6}{\underbrace{777\cdots77}_{2018\text{fois}}8}$ et $Y=\dfrac{\overbrace{222\cdots22}^{2018\text{fois}}3}{\underbrace{444\cdots44}_{2018\text{fois}}5}$:

On remarque qu'en posant $x=\underbrace{11\cdots1}_{2018\text{ fois}}$ on trouve :

$$X=\frac{\overbrace{555\cdots55}^{2018\text{fois}}6}{\underbrace{777\cdots77}_{2018\text{fois}}8}=\frac{1+5\times x}{1+7\times x}=A \text{ et } Y=\frac{\overbrace{222\cdots22}^{2018\text{fois}}3}{\underbrace{444\cdots44}_{2018\text{fois}}5}=\frac{1+2\times x}{1+4\times x}=B$$

On sait que $A>B$ pour tout réel strictement positif x. Donc $X>Y$.

Exercice 3 : (25 points)

Soit $A=\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1$

1) Développer, réduire et ordonner A.

2) Factoriser A.

3) Calculer A pour $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **et** $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **.**

Solution

Soit $A=\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1$

1) Développons, réduisons et ordonnons A.

$$A=\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1$$
$$=\left(x^4-2x^2+1-1\right)^2-1$$
$$=\left(x^4-2x^2\right)^2-1$$
$$=\left(x^2\left(x^2-2\right)\right)^2-1$$
$$A=x^4\left(x^2-2\right)^2-1$$
$$=x^4\left(x^4-4x^2+4\right)-1$$

Donc $A=x^8-4x^6+4x^4-1$

2) Factorisons A.

$$A=\left(\left(x^2-1\right)^2-1\right)^2-1$$
$$=\left(\left(x^2-1\right)^2-1-1\right)\left(\left(x^2-1\right)^2-1+1\right)$$

$$A=\left(\left(x^2-1\right)^2-2\right)\left(x^2-1\right)^2$$
$$=\left(x^2-1-\sqrt{2}\right)\left(x^2-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2$$

Enfin $A=\left(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x^2-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2$

Barème :

Mobilisation minimale des acquis	2
1) Développement de A :	3
Réduction et ordre de A :	3
2) Première factorisation de A:	3
Factorisation finale de A :	4
3) Calcul de A pour $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$:	4
Calcul de A pour $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$:	4
Présentation + idées	2

3) Calculons A pour $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **et** $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **.**

*** On remarque que le nombre** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **annule le 1er facteur de A dans la forme factorisée**

$$A=\left(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x^2-1+\sqrt{2}\right)\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2$$

donc pour $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **on a A=0.**

**** Pour** $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **on remplace dans l'une des écritures de A : par exemple** $A=x^8-4x^6+4x^4-1$ **.**

On obtient $A=\left(2-\sqrt{2}\right)^4-4\left(2-\sqrt{2}\right)^3+4\left(2-\sqrt{2}\right)^2-1$ **d'où**

$$A=\left(6-4\sqrt{2}\right)^2-4\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)+4\left(6-4\sqrt{2}\right)-1 \text{ c'est-à-dire}$$

$$A=68-48\sqrt{2}-4\left(20-14\sqrt{2}\right)+24-16\sqrt{2}-1.$$

Enfin $A=11-8\sqrt{2}$ **.**

Exercice 4 : (25 points)

1) Ecrire sans radical au dénominateur : $A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

2) Simplifier au maximum : $B=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$.

3) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100.$$

Solution

1) Ecrivons sans radical au dénominateur A en multipliant par l'expression conjuguée :

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1}$$

Enfin $A=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Barème :	
Mobilisation minimale des acquis	2
1) Utilisation du conjuguée :	3
Valeur finale de A :	3
2) Utilisation de A :	3
Valeur finale de B:	3
3) L'écriture $-1+\sqrt{n+1}\geq 100$:	3
Résolution de l'inéquation	3
Valeur $n_0=10200$	3
Présentation + idées	2

2) Simplifions au maximum B :

$$B=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}+\frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}.$$

En s'inspirant de 1) on remplace chaque fraction par sa forme sans radical au dénominateur, ce qui donne :

$$B=\left(-1+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+...+\left(-\sqrt{2016}+\sqrt{2017}\right)+\left(-\sqrt{2017}+\sqrt{2018}\right)$$

Par simplification on obtient $B=-1+\sqrt{2018}$.

3) Déterminons le plus petit entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$$

En utilisant la méthode précédente, on remplace chaque fraction par sa forme sans radical au dénominateur. Après simplification on obtient : $-1+\sqrt{n+1}\geq 100$

$$\sqrt{n+1}\geq 101$$
$$n+1\geq 101^2$$
$$\text{soit } n\geq 10200.$$

Alors, le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geq 100$ est $n_0=10200$.

Fin.