Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales
2ème tour

Niveau 4AS

25 février 2018
Durée 3 h

Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (25 points)

Soit x et y deux nombres réels distincts tels que $x^2 = 2018 + y$ et $y^2 = 2018 + x$.
Quelle est la valeur de xy ?

Solution

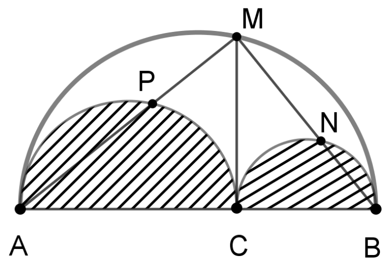
$$\begin{cases} x^2 = 2018 + y \\ y^2 = 2018 + x \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 = y - x \Rightarrow (x-y)(x+y) = -(x-y) \Rightarrow x + y = \frac{-(x-y)}{x-y} = -1$$

En plus $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (2018+y) + (2018+x) + 2xy = 4036 + (x+y) + 2xy = 4035 + 2xy$

D'où $1 = 4035 + 2xy \Rightarrow xy = -2017$

Exercice 2 : (25 points)

La droite (CM) est perpendiculaire à (AB) en C .
1. Montrer que l'aire de la partie non hachurée de la figure est égale à l'aire du disque de diamètre $[CM]$.
2. Montrer que la droite (NP) est tangente aux cercles de diamètres $[AC]$ et $[BC]$.



Solution

1° L'aire du demi disque de diamètre AB est $\pi\frac{AB^2}{8}$, celles des demi disques de diamètres AC et BC sont $\pi\frac{AC^2}{8}$ et $\pi\frac{BC^2}{8}$.

L'aire de la zone non hachurée est $S = \pi\frac{AB^2}{8} - \left(\pi\frac{AC^2}{8} + \pi\frac{BC^2}{8}\right) = \frac{\pi}{8}\left[AB^2 - \left(AC^2 + BC^2\right)\right]$.

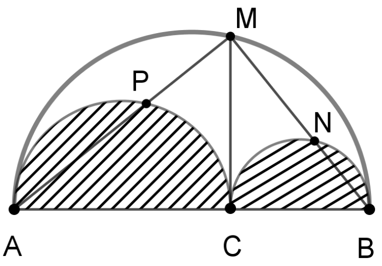
Les triangles AMB, BCN , ACP AMC et BMC ,sont rectangles respectivement en M, N , P, C et C.

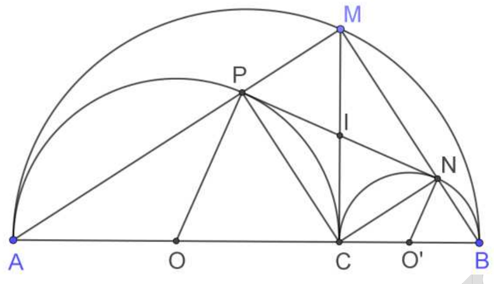
Le théorème de Pythagore dans AMC et BMC nous donne que

$$AC^2 = MA^2 - MC^2,\ BC^2 = MB^2 - MC^2 \Rightarrow AC^2 + BC^2 = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$$

Or $MA^2 + MB^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2 - 2MC^2 \Rightarrow AB^2 - \left(AC^2 + BC^2\right) = 2MC^2$

D'où $S = \dfrac{\pi}{8} \times 2MC^2 = \pi \dfrac{MC^2}{4}$ **qui est l'aire du demi disque de diamètre MC.**





Le quadrilatère CNMP est un rectangle, ses diagonales [NP] et [CM] ont la même longueur et le même milieu I. Les segments [IC] et [IP] ont la même longueur, donc $I \in \text{med}[CP]$**, si O est le milieu de** $[AC]$ **alors** $(OI) = \text{med}[CP]$**, d'où** $\widehat{OPI} = \widehat{OCI} = \dfrac{\pi}{2}$ **ce qui montre que la droite** (IP) **est tangente au cercle de diamètre** $[AC]$**. On démontre avec le même raisonnement que la droite** (IN) **est tangente au cercle de diamètre** $[BC]$**. Comme les points I, N et P sont alignés alors les deux cercles ont une tangente commune qui est** (NP)**.**

Exercice 3 : (25 points)

Soit $X = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 2017^2 - 2018^2$ **et** $Y = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2017 + 2018$**.**
Montrer que $X + Y = 0$

Solution

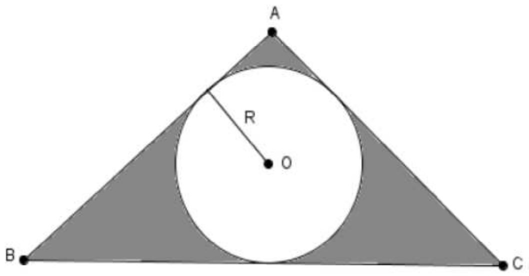
$$X = \sum_{p=1}^{1009}\left[(2p-1)^2 - (2p)^2\right] = \sum_{p=1}^{1009}\left[(2p-1)-(2p)\right]\left[(2p-1)+(2p)\right]$$

$$\Rightarrow X = -\sum_{p=1}^{1009}\left[(2p-1)+(2p)\right] = -\left(\sum_{p=1}^{1009}(2p-1) + \sum_{p=1}^{1009}(2p-1)\right) = -Y$$

D'où $X + Y = 0$

Exercice 4 : (25 points)

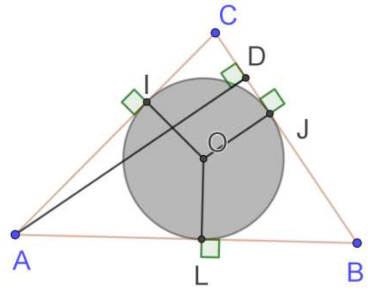
ABC un triangle tel que $AB = 13\,cm$, $BC = 15\,cm$ et $AC = 14\,cm$. O est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et R le rayon de ce cercle. Calculer l'aire hachurée.



Solution

Soit D le projeté orthogonal de A sur (BC).

Les triangles ADB et ADC sont donc rectangles en C, d'où



$$AD^2 = AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow (DB - DC)(DB + DC) = AB^2 - AC^2 \Rightarrow (DB - DC) \times BC = AB^2 - AC^2$$

$$(DB - DC) \times 15 = 13^2 - 14^2 = -27 \Rightarrow DB - DC = \frac{-27}{15} = \frac{-9}{5} \Rightarrow$$

$$DC - DB = \frac{9}{5} + 1.8$$

Or $DC + DB = BC = 15$ **d'où** $2DC = 16.8 \Rightarrow DC = 8.4$ **et** $DB = 6.6$

En plus on a $AD^2 = AB^2 - DB^2 = 13^2 - 6.6^2 = 6.4x19.6 = 125.44 \Rightarrow AD = \sqrt{125.44} = 11.2$

L'aire du triangle ABC est

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{AB \times OL}{2} + \frac{AC \times OI}{2} + \frac{BC \times OJ}{2} = \frac{13 \times R}{2} + \frac{14 \times R}{2} + \frac{15 \times R}{2} = 21R$$

Or $S_{ABC} = \frac{AD \times BC}{2} = \frac{11.2 \times 15}{2} = 84 \Rightarrow R = \frac{84}{21} = 4$

D'où l'aire hachurée est $S = S_{ABC} - \pi R^2 = 84 - 16\pi$.