Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

Sélections régionales
1er tour

Niveau 4AS

20 janvier 2019
Durée 3 h

Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (25 points)

1° Déterminer tous les diviseurs (positifs et négatifs) de 6.

2° On considère quatre entiers naturels a, b, c et d deux-à-deux distincts tels que :

$$(a-2019)(b-2019)(c-2019)(d-2019)=6$$

Déterminer les valeurs possibles de la somme $S=a+b+c+d$.

Solution

1°) Les diviseurs positifs et négatifs du nombre 6 sont tous les éléments de l'ensemble $D=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$.

Barème :	
1° Diviseurs de 6	5
2° Décomposition de 6	5
Démarche ..	5
Valeurs 8075 et 8077	8
Présentation, rédaction et idées	2

2°) a, b, c **et** d **quatre entiers naturels tel que :**

$(a-2019)(b-2019)(c-2019)(d-2019)=6$

D'après la question n°1 les écritures possibles de 6 sous forme d'un produit de quatre entiers relatifs deux à deux distincts sont :

$$(-1)\times1\times(-2)\times3 \quad \text{ou} \quad (-1)\times1\times2\times(-3)$$

et par identification, il résulte que :

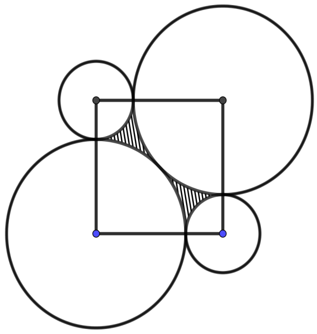
$$(a-2019)+(b-2019)+(c-2019)+(d-2019)=(-1)+1+(-2)+3=1$$
$$\Leftrightarrow a+b+c+d=4\times2019+1=8077$$

ou

$$(a-2019)+(b-2019)+(c-2019)+(d-2019)=(-1)+1+2+(-3)=-1$$
$$\Leftrightarrow a+b+c+d=4\times2019-1=8075$$

Les valeurs possibles de $a+b+c+d$ sont donc $\boxed{8075}$ et $\boxed{8077}$.

Exercice 2 : (25 points)



Sur la figure ci-contre, les centres des quatre cercles sont les sommets d'un carré de coté a. Les grands cercles sont tangents entre eux et tangents aux petits cercles. Soit R le rayon des grand cercles et r celui des petits cercles.

1° a) Calculer R et r en fonction de a.

b) Calculer le rapport $\frac{R}{r}$.

2° Calculer l'aire de la partie hachurée en fonction de a.

Solution

1°) a- D'une part, les deux grands cercles, dont les centres sont des sommets opposés du carré, sont tangents entre eux donc la diagonale du carré mesure $2R$.

Et puisque la longueur l de la diagonale d'un carré de coté a vaut $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}.a$ on en déduit que :

$2R=\sqrt{2}.a$ **ce qui donne :** $\boxed{R=\frac{1}{\sqrt{2}}a}$

- D'autre part les deux grands cercles sont tangents aux deux petits cercles donc

$$R+r=a \Rightarrow r+\frac{1}{\sqrt{2}}.a=a \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.a$$

b- D'après la question a) on a :

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}a}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Barème :	
1° Calcul de R	4
Calcul de r	4
Calcul du rapport	4
2° Démarche ..	4
Valeur de l'aire	6
Présentation, rédaction et idées	3

2°) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée. On constate que :

$\mathcal{A}=$ l'aire du carré $-\frac{1}{2}$(l'aire du grand cercle + l'aire du petit cercle)

Soit $\mathcal{A}=a\times a-\frac{1}{2}\left(\pi R^2+\pi r^2\right)=a^2-\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a\right)^2\right]$

$$=a^2-\frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}a^2-\sqrt{2}.a^2\right]=a^2-\frac{\pi}{2}\left[2a^2-\sqrt{2}.a^2\right]=a^2-\pi a^2+\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^2$$

$$=\boxed{\left(\frac{\sqrt{2}+\pi}{\sqrt{2}}-\pi\right).a^2}$$

<u>Exercice 3 :</u> (25 points)

Soit a et b deux réels tels que : $|a+2| \le 1$ et $0 \le b \le 2$

1) Montrer que : $|a+b+1| \le 2$

2) On considère le nombre A tel que : $A = ab - 2a + 3b$.

a) Montrer que : $0 \le A \le 12$.

b) Montrer que : $A = (a+3)(b-2)+6$ et justifier que $2 \le A \le 6$.

<u>Solution</u>

1°) a et b deux nombres réels tels que : $|a+2| \le 1$ et $0 \le b \le 2$.

Nous avons :

$|a+2| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le a+2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le (a+1)+1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le a+1 \le 0$ en additionnant membre à membre cette dernière inégalité à l'inégalité $0 \le b \le 2$, on obtient :

$-2 \le a+b+1 \le 2$ Et cela veut dire que $|a+b+1| \le 2$.

Barème :

1° Encadrement de a ou a+1	**4**
Inégalité $|a+b+1| \le 2$	**4**
2° a) Inégalité $0 \le A \le 12$	**4**
b) Egalité $A = (a+3)(b-2)+6$	**4**
Inégalité $2 \le A \le 6$	**6**
Présentation, rédaction et idées	**3**

2°) a. Soit $A = ab - 2a + 3b$

Nous avons : $A = ab - 2a + 3b = a(b-2) + 3b$

Avec $-3 \le a \le -1$; $-2 \le b-2 \le 0$ et $0 \le 3b \le 6$ i,e

$0 \le a(b-2) \le 6$ et $0 \le 3b \le 6$

Donc $0 \le a(b-2) + 3b \le 12$ soit $\boxed{0 \le A \le 12}$

b. Nous avons :

$(a+3)(b-2)+6 = ab - 2a + 3b - 6 + 6 = ab - 2a + 3b = A$ donc $\boxed{A = (a+3)(b-2)+6}$

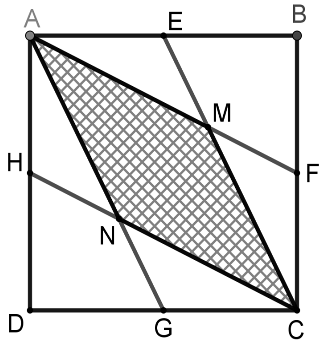
D'après la question 2.a on a : $0 \le a+3 \le 2$ et $-2 \le b-2 \le 0$ donc $-4 \le (a+3)(b-2) \le 0$

$\Rightarrow 2 \le (a+3)(b-2)+6 \le 6$ soit $\boxed{2 \le A \le 6}$.

Exercice 4 : (25 points)

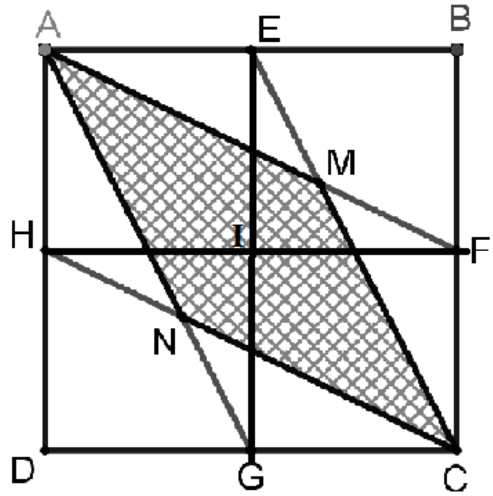
On considère un carré ABCD de côté 1 cm et les milieux E, F, G et H de ses côtés.
Les droites (AF) et (EC) se coupent en M et les droites (AG) et (CH) se coupent en N.

1° Reproduire la figure.
2° Montrer que $AMCN$ est un losange.
3° Calculer la distance MN.
4° Déterminer l'aire du losange $AMCN$.



Solution

1° Figure :



2° Le triangle ABF est rectangle en B donc

$$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$$

Le triangle ADG est rectangle en D donc

$$AG=\sqrt{AD^2+DG^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$$

Le triangle CBE est rectangle en B donc

$$CE=\sqrt{CB^2+BE^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$$

Le triangle CDH est rectangle en D donc $CH=\sqrt{DC^2+DH^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$

M est le centre de gravité de ABC, donc $\begin{cases} AM=\frac{2}{3}AF \\ CM=\frac{2}{3}CE \end{cases}$

N est le centre de gravité de ADC, donc $\begin{cases} AN=\frac{2}{3}AG \\ CN=\frac{2}{3}CH \end{cases}$

Barème :	
1° Figure	4
2°Egalité de distances	4
Losange AMCN	4
3° distance MN	4
4° Aire du losange	6
Présentation, rédaction et idées	3

Or $AM=CE=AG=CH$, donc $AM=CM=CN=AN$, d'où le quadrilatère AMCN est un losange.

3° Pour calculer la distance MN, on note I le milieu de $[AC]$, I est donc le centre du losange AMCN. Alors $MN=2MI$ (1)

ABC est un triangle isocèle et rectangle en B et M son centre de gravité, donc $IM=\frac{1}{3}IB$ (2)

Le point I est le centre du carré ABCD, donc $IB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AD^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}$ (3)

D'après (1), (2) et (3), on a: $\boxed{MN=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}}$

4° L'aire du losange AMCN est égale à $\frac{AC\times MN}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\text{cm}^2$.