Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales
$2^{ème}$ tour

Niveau 7C

25 février 2018
Durée 3 h

Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (20 points)

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.
Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.
Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5) , le nombre 8 par (5, 4).
1° Comment est repéré le nombre 42 ?
2° Comment est repéré le nombre 2018 ?
3° Quel est le nombre qui est sous 2018 ?

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18							

Solution

Soit n le numéro de la ligne et u_n le nombre de cases de cette ligne. On a $u_n = 2n-1$. Chaque nombre est égal au nombre de cases précédentes y compris sa case. Chaque ligne se termine par $n^2 = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(1+2n-1)$.

1° Le nombre 42 est entre $6^2 = 36$ et $7^2 = 49$. Donc il est situé dans la $7^{ièm}$ ligne qui commence par 37 et contient 13 termes et se situe au $6^{ièm}$ rang. La colonne qui le repère est sur la ligne de longueur $13-2\times5=3$ qui commence par 2 et finit par 4. Le nombre 2 est au niveau de 42 tandis que 4 est au niveau de 44. Le nombre 42 est donc repéré par $(37;2)$.

2° Le nombre 2018 est entre $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$. Donc il est situé dans la $45^{ièm}$ ligne qui commence par 1937 et contient $89 = 2\times45-1$ termes. Le nombre 2018 se situe au $82^{ièm}$ rang ($2018-1937+1$). La colonne qui le repère est sur la ligne de longueur $89-2\times7=75$.
C'est la $38^{ièm}$ ($2n-1=75$) ligne qui commence par $1370 = 37^2+1$ et finit par $38^2 = 1444$. Le nombre 1444 est au niveau de 2018 tandis que 1370 est au niveau de 1943. Le nombre 2018 est repéré par $(1937;1444)$.

3° Le nombre qui est sous 2018 est sur la $46^{ièm}$ ligne qui commence par 2026 et contient $91 = 2\times46-1$ termes et se situe au $83^{ièm}$ rang. Ce nombre est 2108.

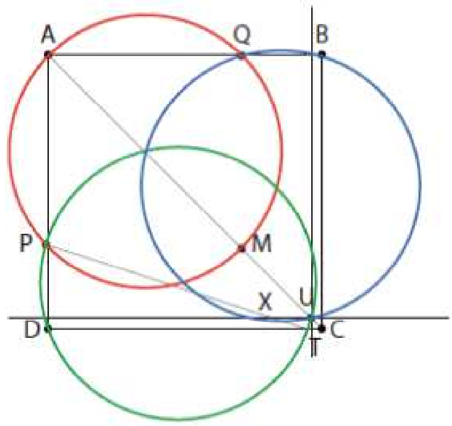
Exercice 2 ; (20 points)

On voudrait recouvrir la surface d'un carré ABCD de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm.
1) Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q. Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm

du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].
a) Faire une figure et calculer DT.
b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.
c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99,75% de la surface du carré ABCD.
2) Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Solution

1° a) Dans la configuration de la figure ci-contre, (C_1) est de diamètre $[AM]$, les triangles APM et AQM sont rectangles respectivement en P et Q. Ces deux points sont donc les projetés orthogonaux respectifs de M sur $[AD]$ et $[AB]$. De plus M est sur la diagonale $[AC]$ ce qui fait de AQMP un carré de diagonale 10 cm et donc de côté $5\sqrt{2}$ cm. On a : $PD = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2} = 5\left(2-\sqrt{2}\right)$ et $PT = 10$ donc, d'après Pythagore dans le triangle PDT rectangle en D, $DT^2 = PT^2 - PD^2 = 25\left(4\sqrt{2}-2\right)$. On trouve alors : $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2}-2}$.



b) La réflexions d'axe (AC) laisse A, M et C invariants et transforme D en B et T en U. s Étant une isométrie, le triangle TCU est rectangle isocèle en C. Le point X est tel que TCUX soit un carré, ainsi $X \in [AC]$. On note O le milieu de $[PT]$ donc le centre de (C_2). On note H le projeté orthogonal de M sur $[CD]$. Ainsi DPMH est un rectangle. Puisque T est sur le côté $[CD]$ du carré, le théorème des milieux assure que O est sur la médiatrice commune Δ de $[DP]$ et $[MH]$, qui est donc la parallèle à $[CD]$ passant par O.
On a $DH = PM = 5\sqrt{2}$. Or $\sqrt{2} > 1$ donc $4\sqrt{2} - 2 > 2$. Ainsi d'après a), on $DH < DT$, ce qui veut dire que $H \in [DT]$. Or DPT est rectangle en D, donc $D \in (C_2)$. Le segment $[DT]$ est donc une corde de (C_2), ce qui prouve que H est à l'intérieur de (C_2).
Par réflexion d'axe le diamètre de (C_2) porté par Δ (parallèle à (CT)), le point M est à l'intérieur de (C_2).
Revenons au point X. La droite Δ est perpendiculaire à (XT) et passe par le point O centre de (C_2). De plus, on a $T \in (C_2)$. On note R le projeté orthogonal de O sur (TX). Le point X est intérieur à (C_2) si et seulement si $TX < 2TR$.
Or on a $2TR = PD = AD - AP = CD - DH$. D'autre part, on a $TX = CT = DC - DT$.
Ainsi, le point X est à l'intérieur de (C_2) si et seulement si $DH < DT$, et nous avons vu ci-dessus que cette dernière inégalité est vraie. Finalement, le point X est intérieur à (C_2).
c) Le cercle (C_1) recouvre le carré AQMP. Les points P, D, T sont sur (C_2) et les points M, X sont à l'intérieur de (C_2). Par suite (C_2) recouvre la surface du pentagone DPMXT. Par échange des

rôles, (C_3) recouvre la surface du pentagone $BQMXU$. Ainsi les trois cercles recouvrent tout $ABCD$ sauf une partie du carré $TCUX$. Pour conclure, il suffit de prouver que l'aire de $TCUX$ ne dépasse pas 0.25% de celle de $ABCD$, c'est-à-dire que $CT < \frac{1}{20}CD$. Cela revient à prouver que $DT > \frac{19}{20}CD$. On a vu au a) que $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ et on a $DC = 101$. Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{4\sqrt{2}-2} > 1.9$ ou encore que $4\sqrt{2}-2 > (1.9)^2$, c'est-à-dire $\sqrt{2} > 1.4025$, ce qui est vrai.

Ainsi les cercles $(C_1),(C_2),(C_3)$ recouvrent plus de 99.75%.

2° On procède par l'absurde : Supposons que les trois disques $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ chacun de rayon 5 cm, recouvrent entièrement $ABCD$. Comme le carré a quatre sommets et qu'il n y a que trois cercles, deux des sommets sont recouverts par un même cercle, disons Γ_1. Comme Γ_1 est de diamètre 10, soit plus petit que la longueur de la diagonale du carré, c'est que Γ_1 recouvrent deux sommets consécutifs, disons A,B. De plus, puisque $AB = 10$cm, c'est que $[AB]$ est un diamètre de Γ_1. Mais alors, hormis ceux de $[AB]$, le cercle Γ_1 ne recouvre aucun autre point du bord de $ABCD$ .On admet que C est recouvert par un des deux autres cercles, disons Γ_2. De même que ci-dessus, le cercle Γ_2 ne peut recouvrir aucun autre point de $[AD]$. Par suite, tout $[AD]$ est recouvert par Γ_3, ce qui implique que $[AD]$ est un diamètre de Γ_3. Mais alors comme ci-dessus, le cercle Γ_3 ne peut recouvrir aucun point de $[BC]$. Par suite, tout $[BC]$ est recouvert par Γ_2 et donc $[BC]$ est un diamètre de Γ_2. Par conséquent aucun des trois cercles ne recouvre $]CD[$. D'où contradiction.

Il est donc impossible de recouvrir toute la surface $ABCD$ par trois disques $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$, chacun de rayon 5cm.

Exercice 3 : (20 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 15; \quad U_1 = 57 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

1) Calculer : $V_0, V_1, ..., V_9$.

2) Justifier que la suite (V_n) est périodique. Déterminer sa période.

3) Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid U_{2018}$.

Solution

1° Les premiers termes sont : $u_0 = 15$, $u_1 = 57$, $u_2 = 72$, $u_3 = 129$, $u_4 = 201$, $u_5 = 330$, $u_6 = 531$, $u_7 = 861$, $u_8 = 1392$ et $u_9 = 2253$.

On a : $u_0 \equiv 6\,[9]$; $u_1 \equiv 3\,[9]$; $u_2 \equiv 0\,[9]$; $u_3 \equiv 3\,[9]$; $u_4 \equiv 3\,[9]$; $u_5 \equiv 6\,[9]$; $u_6 \equiv 0\,[9]$; $u_7 \equiv 6\,[9]$; $u_8 \equiv 6\,[9]$; $u_9 \equiv 3\,[9]$. Donc

$v_0 = 6$	$v_1 = 3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	$v_5 = 6$	$v_6 = 0$	$v_7 = 6$	$v_8 = 6$	$v_9 = 3$

On constate que $v_8 = v_0$ et que $v_9 = v_1$ donc $v_{10} = v_2$ par compatibilité de l'addition avec les congruences. Plus généralement on a : $v_{n+8} = v_n$. La suite (v_n) est périodique de période 8.

2° En effet, u_0 et u_1 sont multiples de 3, donc $u_2 = u_1 + u_0$ l'est aussi. De même u_3 est divisible par 3. Plus généralement, si u_{n-1} et u_{n-2} sont multiples de 3, alors u_n l'est aussi. On prouve ainsi de proche en proche (par récurrence, en fait) que pour tout entier n, 3 divise u_n. Donc $3 | u_{2017}$ et $k \geq 1$. La suite (v_n) est périodique de période 8 et $2017 = 8\times 252+1$ donc $v_{2017} = v_1 = 3$. On en déduit que 9 ne divise pas u_{2017} et par suite $k < 2$. Donc $k = 1$.

Exercice 4 : (20 points)

Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant : $\begin{cases}(x+1)yz = 12\\(y+1)zx = 4\\(z+1)xy = 4\end{cases}$

Solution

Soit (x, y, z) une solution. Il est évident qu'aucun des nombres n'est nul.
En retranchant la troisième équation de la deuxième, on trouve : $xz = xy$, puis en simplifiant par x on obtient $y = z$. En retranchant la troisième équation de la première, on trouve $y^2 - xy = 8$, ou encore $xy = y^2 - 8$. La deuxième équation se réécrit $y^2x + xy = 4$.
Il vient donc : $y(y^2-8)+y^2-8 = 4$, ou encore $y^3+y^2-8y-12 = 0$.
On remarque que $y = 3$ est une solution. En effectuant la division par $y-3$ on trouve :
$y^3+y^2-8y-12 = (y-3)(y^2+4y+4) = (y-3)(y+2)^2$.

On en déduit que $y = z = 3$ ou $y = z = -2$. Dans le premier cas, $x = \dfrac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x = 2$.

Les seules solutions sont les triplets $(2,-2,-2)$ et $\left(\dfrac{1}{3},3,3\right)$.

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel tel que : $f(0;y) = y+1$, $f(x;\ 0) = f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$.

Solution

Numérotons les propriétés :

$f(0;y) = y+1 \quad (1)$

$f(x;\ 0) = f(x-1;1) \quad (2)$

$f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y)) \quad (3)$

Les propriétés (2) et (1) donnent : $f(1;0) = f(0;1) = 2$

Les propriétés (2), (3) et (1) donnent : $f(2\ ;\ 0) = f(1;1) = f(0;f(1;0)) = f(0;2) = 3$

Les propriétés (3) et (1) donnent : $f(1;2) = f(0;f(1;1)) = f(0;3) = 4$

Les propriétés (3) et (1) donnent : $f(2;1) = f(1;f(2;0)) = f(1;3) = f(0;f(1;2)) = f(0;4) = 5$

Les propriétés (3) et (1) donnent : $f(1;4) = f(0;f(1;3)) = f(0;5) = 6$

Les propriétés (3) et (1) donnent : $f(2;2) = f(1;f(2;1)) = f(1;5) = f(0;f(1;4)) = f(0;6) = 7$

Conclusion : $f(2;1) = 5$ et $f(2;2) = 7$.

Fin.