Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

Sélections régionales 1^er tour **Niveau 4AS** **28 février 2021**

Corrigé

proposé par AMIMATHS

Exercice 1: (25 points)

Soit a un entier naturel non nul

1) **Montrer que** $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$

2) **Montrer que** $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$

3) **Déterminer quatre entiers naturels distincts x, y, z et t tels que :** $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}$

4) **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation** $\frac{1}{2021x+2021}+\frac{1}{2021x^2+2021x}=\frac{1}{10105}$.

Corrigé de l'Exercice 1

Barème :

1)	6 pts
2)	6 pts
3)	6 pts
4)	5 pts
Présentation et idées	2pts

1) Pour tout entier naturel non nul a :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times\frac{a+1}{a+1}=\frac{a}{a(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$$

2) Comme pour tout entier naturel non nul a, on a :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$$

alors :

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}$$

et $\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)+1}+\frac{1}{(a(a+1))(a(a+1)+1)}=\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$

Donc $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{(a^2+a)(a^2+a+1)}$

3) En appliquant la dernière égalité pour $a=3$, on obtient :

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3+2}+\frac{1}{(3+1)(3+2)}+\frac{1}{3^2+3+1}+\frac{1}{(3^2+3)(3^2+3+1)}$$

Donc $\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{13}+\frac{1}{156}$

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\frac{1}{2021x+2021}+\frac{1}{2021x^2+2021x}=\frac{1}{10105}$

En multipliant l'égalité précédente par 2021 on obtient $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{5}$

Or, d'après la question 1 : $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x}$ **il en résulte donc que** $x=5$

Exercice 2: (25 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \neq b^2$; On pose $m = \frac{ab}{a+b}$ et $n = \frac{-ab}{a-b}$

1) Montrer que $(a-m)(b-m) = m^2$

2) Montrer que $(a-n)(b+n) = -n^2$

3) Déterminer deux réels différents x et y tels que : $\left(x-\frac{15}{8}\right)\left(y-\frac{15}{8}\right)\left(x-\frac{15}{2}\right)\left(y+\frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{4}\right)^4$

Corrigé de l'Exercice 2

1) Egalité 1 :

$$\begin{aligned}(a-m)(b-m) &= \left(a-\frac{ab}{a+b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)\\ &= \left(\frac{a^2+ab-ab}{a+b}\right)\left(\frac{ab+b^2-ab}{a+b}\right)\\ &= \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\\ &= m^2\end{aligned}$$

Barème :
1) 7 pts
2) 7 pts
3) 9 pts

Présentation et idées 2pts

2) Egalité 2 :

$$\begin{aligned}(a-n)(b+n) &= \left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(b-\frac{ab}{a-b}\right)\\ &= \left(\frac{a^2-ab+ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab-b^2-ab}{a-b}\right)\\ &= -\left(\frac{ab}{a-b}\right)^2\\ &= -n^2\end{aligned}$$

3) Calcul de x et y :

$$\left(x-\frac{15}{8}\right)\left(y-\frac{15}{8}\right)\left(x-\frac{15}{2}\right)\left(y+\frac{15}{2}\right) = -\left(\frac{15}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5\times3}{5+3}\right)\left(y-\frac{5\times3}{5+3}\right)\left(x-\frac{5\times3}{5-3}\right)\left(y+\frac{5\times3}{5-3}\right) = -\left(\frac{3\times5}{3-5}\right)^2\times\left(\frac{5\times3}{5+3}\right)^2$$

Or d'après la question 1 : $\boxed{\left(3-\frac{5\times3}{5+3}\right)\left(5-\frac{5\times3}{5+3}\right) = \left(\frac{5\times3}{5+3}\right)^2}$

et d'après la question 2 : $\left(3+\frac{3\times5}{3-5}\right)\left(5-\frac{3\times5}{3-5}\right) = -\left(\frac{3\times5}{3-5}\right)^2$

Donc $\left(3-\frac{5\times3}{5-3}\right)\left(5+\frac{5\times3}{5-3}\right) = -\left(\frac{3\times5}{3-5}\right)^2$

Alors, des valeurs possibles de réels x et y sont $x = 3$ et $y=5$.

Exercice 3: (25 points)

Soit $a=\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$; $b=\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ et $F=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

1) Comparer les nombres a et b.

2) Ecrire F sous la forme $x+y\sqrt{z}$ où x ; y sont des nombres rationnels et z l'entier naturel le plus petit possible.

Corrigé de l'Exercice 3

1) Comparaison de a et b

<table>
<tr>
<td>$a=\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$
$\begin{cases}\sqrt{4+\sqrt{7}}>\sqrt{4-\sqrt{7}}\\ \sqrt{3+\sqrt{5}}>\sqrt{3-\sqrt{5}}\end{cases}$
$\Rightarrow a>0$</td>
<td>$b=\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$
$\begin{cases}\sqrt{6+\sqrt{11}}>\sqrt{6-\sqrt{11}}\\ \sqrt{4+2\sqrt{3}}>\sqrt{4-2\sqrt{3}}\end{cases}$
$\Rightarrow b>0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Calculons a^2
$a^2=\left(\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2}{\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2}$
$=\dfrac{4+\sqrt{7}-2\sqrt{4+\sqrt{7}}\times\sqrt{4-\sqrt{7}}+4-\sqrt{7}}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\times\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5}}$
$=\dfrac{8-2\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)\left(4-\sqrt{7}\right)}}{6-2\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}}=\dfrac{8-2\sqrt{4^2-\sqrt{7}^2}}{6-2\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}}$
$=\dfrac{8-2\sqrt{16-7}}{6-2\sqrt{9-5}}=\dfrac{8-2\sqrt{9}}{6-2\sqrt{4}}=\dfrac{8-6}{6-4}=\dfrac{2}{2}=1$</td>
<td>Calculons b^2
$b^2=\left(\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2}{\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2}$
$=\dfrac{6+\sqrt{11}-2\sqrt{6+\sqrt{11}}\times\sqrt{6-\sqrt{11}}+6-\sqrt{11}}{4+2\sqrt{3}-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\times\sqrt{4-2\sqrt{3}}+4-2\sqrt{3}}$
$=\dfrac{12-2\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)}}{8-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{12-2\sqrt{6^2-\sqrt{11}^2}}{8-2\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$
$=\dfrac{12-2\sqrt{36-11}}{8-2\sqrt{16-12}}=\dfrac{12-2\sqrt{25}}{8-2\sqrt{4}}=\dfrac{12-10}{8-4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Comme $\begin{cases}a^2>b^2\\ a>0 \text{ et } b>0\end{cases}$ alors $a>b$</td>
</tr>
</table>

2) Comme $\begin{cases}a^2=1 \text{ et } b^2=\dfrac{1}{2}\\ a>0 \text{ et } b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$$F=\frac{a^2+b^2}{a+b}\Rightarrow F=\frac{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{3}{2+\sqrt{2}}=\frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2}$$

$$=\frac{6-3\sqrt{2}}{4-2}=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$$

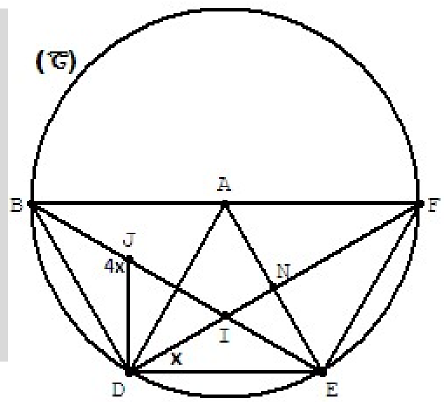
Enfin $F=3-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

Barème :

1) Calcul de a^2	5pts
Calcul de b^2	5pts
Conclusion $a>b$	5pts
2) Remplacement dans F	3pts
Calculs	3pts
Résultat final	2pts
Présentation et maîtrise des calculs	2pts

Exercice 4: (25 points)

Sur la figure ci-contre :
$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre A
Les points B, A et F sont alignés
Le point J est le milieu de $[BI]$.
$(AD)//(EF)$; $\widehat{BJD}=4x$ et $\widehat{EDF}=x$.
1) Montrer que le triangle IDE est isocèle en I
2) Exprimer en fonction de x les mesures des angles $\widehat{BFD}$, $\widehat{ADF}$, $\widehat{EBF}$ et $\widehat{DFE}$.
3) En déduire la valeur de x.



Corrigé de l'Exercice 4

1)On a :

*** Le triangle BDI est rectangle en D et J est le milieu $[BI]$, donc $\widehat{BID}=\dfrac{\widehat{BJD}}{2}=2x$**

***** $\widehat{EID}=180°-\widehat{BID}$
$=180°-2x$

*** Dans le triangle IDE :**

$\widehat{IED}=180°-(\widehat{EID}+\widehat{IDE})$
$=180°-(180°-2x+x)=x$

***Comme $\widehat{IED}=\widehat{IDE}$ alors le triangle IDE est isocèle en I .**

Barème :
1) ______ 5 pts
2) $\widehat{BFD}$ ______ 3 pts
$\widehat{ADF}$ ______ 3 pts
$\widehat{EBF}$ ______ 3 pts
$\widehat{DFE}$ ______ 3 pts
3) Valeur de x ______ 6 pts
Présentation et idées 2pts

2) * Les angles inscrits $\widehat{BFD}$ et $\widehat{BED}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$,

Donc $\widehat{BFD}=\widehat{BED}\Rightarrow\widehat{BFD}=x$

- **Le triangle ADF est isocèle en A donc**
  $\widehat{ADF}=\widehat{AFD}$ **or** $\widehat{AFD}=\widehat{BFD}=x$ **donc** $\widehat{ADF}=x$
- **Les angles inscrits $\widehat{EBF}$ et $\widehat{EDF}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{EF}$, donc**
  $\widehat{EBF}=\widehat{EDF}\Rightarrow\widehat{EBF}=x$
  $\widehat{DFE}$ et $\widehat{ADF}$ Sont deux angles alternes-internes et (AD) //(EF) donc $\widehat{DFE}=\widehat{ADF}$ alors
  $\widehat{DFE}=x$

3) * L'angle inscrit $\widehat{BFD}$ et l'angle au centre $\widehat{BAD}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BD}$, donc
$\widehat{BAD}=2\times\widehat{BFD}\Rightarrow\widehat{BAD}=2x$

- **L'angle inscrit $\widehat{EBF}$ et l'angle au centre $\widehat{EAF}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{EF}$, donc**
  $\widehat{EAF}=2\times\widehat{EBF}\Rightarrow\widehat{EAF}=2x$
- **On a :**
  $$\begin{cases}\widehat{EAD}=180°-(\widehat{EAF}+\widehat{BAD})=180°-(2x+2x)=180°-4x\\ \widehat{EAD}=2\times\widehat{EFD}=2x\end{cases}$$
  $\Rightarrow 2x=180°-4x\Rightarrow 6x=180°\Rightarrow x=30°$

Fin.