Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

Sélections régionales 1er tour **Niveau 7C** **28 février 2021**

Corrigé

proposé par AMIMATHS

Exercice 1: (25 points)

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-4&1\\2&4&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

1) **Calculer AB, AC et AD.**
2) **Trouver toutes les matrices carrées M d'ordre 3 telles que AM=0 (où 0 désigne la matrice nulle).**

Corrigé de l'Exercice 1

1) $$AB=\begin{pmatrix}4&6&2\\3&0&3\\5&12&1\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}4&6&2\\3&0&3\\5&12&1\end{pmatrix}$$

$$AD=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Barème :

1) Calcul de AB	4 pts
Calcul de AC	4 pts
Calcul de AD	4 pts
2) Calcul de AM	4pts
Ecriture du système	3pts
Obtention du résultat	4pts
Présentation générale de l'exercice	2pts

3) Si $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&i&j\end{pmatrix}$ alors $AM=\begin{pmatrix}a+g&b+i&c+j\\d+g&e+i&f+j\\2a-d+g&2b-e+i&2c-f+j\end{pmatrix}$

$$AM=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+g=0\\d+g=0\\2a-d+g=0\\b+i=0\\e+i=0\\2b-e+i=0\\c+j=0\\f+j=0\\2c-f+j=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=d=-g\\b=e=-i\\c=f=-j\end{cases}$$

Donc $\boxed{M=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&c\\-a&-b&-c\end{pmatrix}}$ **où a, b et c des réels.**

Exercice 2: (25 points)

1) Résoudre l'équation $Z^2 - 104Z + 4913 = 0 \quad (E)$.

2) Soit z_1 et z_2 deux complexes tels que $z_1z_2 = 17$ et soit $x = z_1 + z_2$.

Montrer que $x^3 = 51x + 104$ si et seulement si z_1^3 et z_2^3 sont les solutions de l'équation (E).

3) On appelle entier de Gauss tout nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs. C'est-à-dire : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que les solutions de (E) sont des cubes d'entiers de Gauss.

4) En déduire que l'équation $x^3 = 51x + 104$ a une solution entière que l'on déterminera.

Corrigé de l'Exercice 2

1) $\Delta' = 52^2 - 4913 = 2704 - 4913 = -2209 = -(2500 + 9 - 300) = -(50^2 + 3^2 - 2\times 50 \times 3) = -47^2$ **donc les solutions de (E) sont $52 + 47i$ et $52 - 47i$.**

Barème :

1) Résolution de l'équation	6 pts
2) Equivalence	6 pts
3) Entiers de Gauss	6 pts
4) Solution entière	5 pts
Présentation générale de l'exercice	2pts

2) Si $x^3 = 51x + 104$ alors $(z_1 + z_2)^3 = 51(z_1 + z_2) + 104$

$\Leftrightarrow z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) = 51(z_1 + z_2) + 104 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 = (51 - 3z_1z_2)(z_1 + z_2) + 104 = 104$.

En plus $z_1z_2 = 17 \Rightarrow z_1^3z_2^3 = 17^3 = (20-3)^3 = 8000 - 3600 + 540 - 27 = 4913$

D'où $\begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1^3 \times z_2^3 = 4913 \end{cases}$ **donc z_1^3 et z_2^3 sont solutions de l'équation $Z^2 - 104Z + 4913 = 0$ qui est (E).**

<u>Réciproquement</u> :

Si z_1^3 et z_2^3 sont solutions de l'équation (E) alors on a $\begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1^3 \times z_2^3 = 4913 = 17^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^3 + z_2^3 = 104 \\ z_1z_2 = 17 \end{cases}$.

Or $x^3 = z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) \Rightarrow x^3 = 104 + 51x$

3) Soient a et b deux entiers tels que $(a + bi)^3 = 52 + 47i$ c'est-à-dire que $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 52 \\ 3a^2b - b^3 = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 - 3b^2) = 52 \\ b(3a^2 - b^2) = 47 \end{cases} \quad (S)$.

Donc b est un diviseur de 47 qui est un nombre premier alors $b \in \{1; -1; 47; -47\}$

En prenant $b = 1$ le système (S) s'écrit $\begin{cases} a(a^2 - 3) = 52 \\ 3a^2 - 1 = 47 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 16 \text{ et } 13a = 52 \Rightarrow a = 4$

D'où $(4 + i)^3 = 52 + 47i \Rightarrow (4 - i)^3 = 52 - 47i$ **donc les solutions de l'équation (E) sont des cubes d'entiers de Gauss.**

4) Soient $z_1 = 4 + i$ et $z_2 = 4 - i$ donc $z_1z_2 = 17$, en plus $z_1^3 = 52 + 47i$ et $z_2^3 = 52 - 47i$ sont les solutions de (E) alors d'après la question 2) on a $x = z_1 + z_2$ est solution de l'équation $x^3 = 51x + 104$. Or $z_1 + z_2 = 8$. D'où 8 est une solution entière de l'éqution $x^3 = 51x + 104$.

Remarque : les solutions de $x^3 = 51x + 104$ sont $8; -4 + \sqrt{3}$ et $-4 - \sqrt{3}$.

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P \neq M$ et $Q \neq N$).

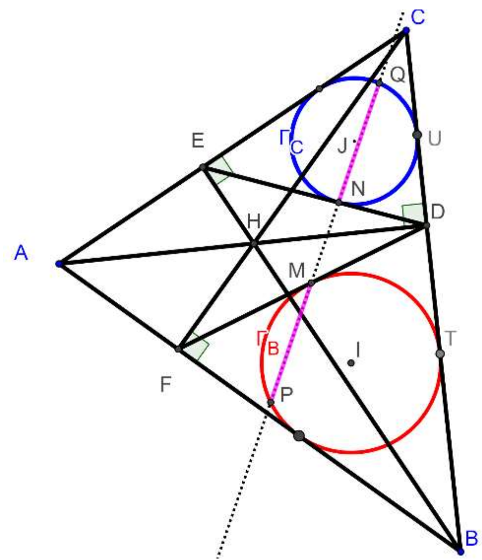
1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM = QN$.

Corrigé de l'Exercice 3

1) Figure



2) On note r_B et r_C les rayons respectifs des cercles Γ_B et Γ_C ; T et U leurs points de contact avec la tangente commune (BC).

Les triangles ACD et ACF sont rectangles de même hypoténuse. Alors les points A,F,D et C sont cocycliques. Il en est de même pour les points A,B,D et E

Donc on a (modulo π) :

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI}) &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DT}) && \text{symétrie}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}) && \text{colinéarité}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) && \text{cocyclicité}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) && \text{colinéarité}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}) && \text{cocyclicité}\\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DU}, \overrightarrow{DN}) && \text{colinéarité}\\
&= (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DN}) && \text{symétrie}
\end{aligned}
$$

Barème :	
1) Figure soignée	5pts
2) Utilisation des cocyclicités et colinéarités	4pts
Rédaction et résultat final	4pts
3) Triangles semblables et rapport des rayons	3pts
Utilisation de la loi des sinus et égalité des angles	4pts
Obtention du résultat	3pts
Présentation générale de l'exercice	2pts

3) Les triangles rectangles DMI et DNJ sont semblables (mêmes mesures d'angles). Donc on a

$\frac{DN}{DM} = \frac{JN}{JM} = \frac{r_C}{r_B}$. **D'autre part,** $\frac{\sin \widehat{MND}}{DM} = \frac{\sin \widehat{DMN}}{DN} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{\sin \widehat{DMN}}{\sin \widehat{MND}}$.

On a : $PM = 2r_B \sin \widehat{MTP}$ **et** $(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TP}) = (\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MP}) = (\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}) [\pi]$ **donc** $PM = 2r_B \sin \widehat{DMN}$

$QN = 2r_C \sin \widehat{QUN}$ **et** $(\overrightarrow{UN}, \overrightarrow{UQ}) = (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NQ}) = (\overrightarrow{ND}, \overrightarrow{NM}) [\pi]$ **donc** $QN = 2r_C \sin \widehat{MND}$

Donc $\frac{PM}{QN} = \frac{2r_B \sin \widehat{DMN}}{2r_C \sin \widehat{MND}} = \frac{r_B}{r_C} \times \frac{\sin \widehat{DMN}}{\sin \widehat{MND}} = \frac{DM}{DN} \times \frac{DN}{DM} = 1$.

Enfin $PM = QN$.

Exercice 4: (25 points)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n + y^n = 1$.

1) Montrer que pour tout réel $t \in]0,1[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4} < \dfrac{1}{t}$.

2) Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Corrigé de l'Exercice 4

1) $\forall t \in]0,1[$ **on a** $(1+t^4) - t(1+t^2) = (1-t)(1-t^3) > 0 \Rightarrow t(1+t^2) < 1+t^4 \Rightarrow \dfrac{1+t^2}{1+t^4} < \dfrac{1}{t}$

2) Remarquons que $x^n + y^n = 1 \Leftrightarrow x^n = 1 - y^n$ **et** $y^n = 1 - x^n$ **.**

En prenant $t = x^k$ **on trouve :**

$$\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} = \frac{1+t^2}{1+t^4} < \frac{1}{t} = \frac{1}{x^k} \Rightarrow \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \frac{1}{x^k}.$$

Barème :	
1) L'inégalité	8 pts
2) Changement de variable	4 pts
Utilisation de la somme d'une SG	4 pts
Sommes des inégalités	4pts
Produit des inégalités et résultat final	3pts
Présentation générale de l'exercice	2pts

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x} \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x^n - 1}{x^n(x-1)} = \frac{y^n}{x^n(1-x)} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}} < \frac{y^n}{x^n(1-x)} \quad (1)}.$$

Par analogie on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y^k} = \frac{y^n - 1}{y^n(y-1)} = \frac{x^n}{y^n(1-y)} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}} < \frac{x^n}{y^n(1-y)} \quad (2)}.$$

Le produit des relations (1) et (2) donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \frac{y^n}{x^n(1-x)} \times \frac{x^n}{y^n(1-y)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

D'où $\boxed{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right) < \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}}$.

Fin.