Olympiades Nationales de Mathématiques 2024

3e tour **Niveau 7C**

Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x différent de 0 et 1, on a

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=(2x-1)^2+f\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Trouver l'expression de $f(x)$.

Corrigé

D'après la définition de f n a $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)-f\left(1-\frac{1}{x}\right)=(2x-1)^2$ (1).

En substituant x par $1-\frac{1}{x}$, la relation précédente s'écrit

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)-f\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)=\left(2\left(1-\frac{1}{x}\right)-1\right)^2 \Rightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)-f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 \quad (2)$$

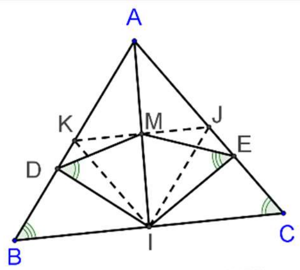
La somme des relations (1) et (2) donne $2f(x)=(2x-1)^2+\left(1-\frac{2}{x}\right)^2$.

Barème Exercice 4	
Toute solution complète vaut	25pts
Relation (1)	9pts
Relation (2)	8pts
Somme et résultat	6pts
Idée Présentation	2pts

Exercice 2 (25 points)

ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et M celui de $[AI]$.
On place sur $[AB]$ le point D tel que $\angle MDI=\angle ACB$ et $AD>BD$.
De même on place sur $[AC]$ le point E tel que $\angle MEI=\angle ABC$ et $AE>CE$.
Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques.

Corrigé



Barème Exercice 2	
Toute solution complète vaut	25pts
Figure	6pts
Cocyclicité MKDI	4pts
Cocyclicité MJEI	4pts
Cocyclicité KDJE	4pts
Résultat	5pts
Idée Présentation	2pts

Soient J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$. $M\in(JK)$ et $(JK)\parallel(BC)$, $(KI)\parallel(CA)$ et $(IJ)\parallel(AB)$.

On a $\angle MDI=\angle ACB=\angle AJK=\angle MKI$ donc les points M, K, D et I sont cocycliques.
De même $\angle MEI=\angle ABC=\angle AKJ=\angle MJI$ donc les points M, J, E et I sont cocycliques.
La puissance du point A par rapport à ces deux cercles donne $AK.AD=AM.AI=AJ.AE$ donc les points K, D, J et E sont cocycliques.
$\angle BDE=180-\angle KDE=\angle KJE=180-\angle KJA=180-\angle BCE$.
Alors les points B, C, D et E sont cocycliques.

<u>Exercice</u> 3 (25 points)

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que

$$a+b+c+d=16 \text{ et } \frac{abc+2}{a+2}=\frac{bcd+2}{b+2}=\frac{cda+2}{c+2}=\frac{dab+2}{d+2}$$

1° Vérifier que $da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$ et en déduire la valeur de $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$

2° Déterminer l'ensemble des valeurs possibles des nombres a, b, c et d.

Corrigé

Barème Ex1	
Toute solution complète vaut 25pts	
1. Relation 1	4pts
Système	6pts
Déduction	4 pts
2. a=b ou ab=1	5 pts
Résultat	4 pts
Idée Présentation	2pts

1° $\frac{abc+2}{a+2}=\frac{dab+2}{d+2} \Leftrightarrow da^2b+2dab+2a+4=abcd+2abc+2d+4$

$\Leftrightarrow da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$

La symétrie de rôle permet la déduction de trois autres relations analogues. D'où le système

$$\begin{cases} da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d \\ ab^2c+2abc+2b=abcd+2bcd+2a \\ bc^2d+2bcd+2c=abcd+2cda+2b \\ cd^2a+2cda+2d=abcd+2dab+2c \end{cases}$$

La somme des quatre équations donne, après simplification des termes répétés dans les deux membres, $da^2b+ab^2c+bc^2d+cd^2a=4abcd$ qui est équivalent à $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=4$.

2° Selon IAG $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\geq 4$ et il y a égalité si et seulement si $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

D'où $a^2=c^2$ et $b^2=d^2$ autrement dit $a=c$ et $b=d$.

Par conséquent $da^2b+2dab+2a=abcd+2abc+2d$ s'écrit

$a^2b^2+2ab^2+2a=a^2b^2+2a^2b+2b \Leftrightarrow (ab-1)(a-b)=0$

D'où $a=b$ ou $ab=1$

1^er^ cas si $a=b$ alors on a $a=b=c=d=4$ on a donc $(a,b,c,d)=(4,4,4,4)$

2^e^ cas si $ab=1$ alors la relation $a+b+c+d=16$ s'écrit $a+\frac{1}{a}=8$ ce qui donne $a^2-8a+1=0$

dont $\Delta'=15$ d'où $a=4+\sqrt{15}$ ou $a=4-\sqrt{15}$

- $a=4+\sqrt{15}\Rightarrow b=\frac{1}{4+\sqrt{15}}=4-\sqrt{15}$ **alors on a** $(a,b,c,d)=\left(4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right)$
- $a=4-\sqrt{15}\Rightarrow b=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=4+\sqrt{15}$ **alors on a** $(a,b,c,d)=\left(4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15}\right)$

Alors il existe trois quadruplets (a,b,c,d) solutions :

$(4,4,4,4);\left(4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right);\left(4-\sqrt{15},4+\sqrt{15},4-\sqrt{15},4+\sqrt{15}\right)$

<u>Exercice</u> 4 (25 points)

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n, p et q tels que : $n^2=2^p+21^q$

Corrigé

Discutons selon la parité de p

1^er^ cas si p est impair, soit $p=2k+1$ alors $2^p=2^{2k+1}\equiv 2[3]$ et $21^q\equiv 0[3]$ donc $n^2\equiv 2[3]$ ce qui est impossible car le reste de la division euclidienne par 3 d'un carré parfait est soit 0, soit 1.

2^e^ cas si p est pair, $p=2k$ donc $21^q=n^2-2^{2k}=(n+2^k)(n-2^k)$

Soit d le pgcd des nombres $n+2^k$ et $n-2^k$ alors d divise 21^q donc il divise 21.

Barème Exercice 3	
Toute solution complète vaut	25pts
Cas particulier	11pts
Discussion et unicité	12pts
Idée Présentation	2pts

Supposons que l'un des nombres premiers 3 et 7 divise chacun des deux nombres $n+2^k$ et $n-2^k$ donc il divise $(n+2^k)+(n-2^k)=2n$ alors il divise n. Par conséquent 3 ou 7 divisera n^2-21^q ce qui signifie qu'il divisera 2^p qui est impossible. Alors $d=1$.

Par conséquent $21^q=(n+2^k)(n-2^k)$ signifie que $\begin{cases} n-2^k=1 \\ n+2^k=21^q \end{cases}$ ou $\begin{cases} n-2^k=3^q \\ n+2^k=7^q \end{cases}$ (notons que $n-2^k<n+2^k$)

- $\begin{cases} n-2^k=1 \\ n+2^k=21^q \end{cases} \Rightarrow 2^{k+1}=21^q-1 \Rightarrow 2^{k+1}\equiv 6[7]$ ce qui est contradictoire car pour tout entier m, 2^m est congru soit à 1 ou 2 ou 4.
- $\begin{cases} n-2^k=3^q \\ n+2^k=7^q \end{cases}$ donc $n=2^k+3^q$ et $2^{k+1}=7^q-3^q$
  - Pour q=1 on a $k=1 \Rightarrow p=2$ et $n=5$. Donc $\begin{cases} n=5 \\ p=2 \\ q=1 \end{cases}$
  - Pour $q\geq 2$, le cas $k=1$ étant déjà traité on a donc $k\geq 2$, d'où 2^{k+1} est un multiple de 8, or $7^q-3^q\equiv 0[8]$ ne peut avoir lieu que si q est pair .
    Supposons que $q=2r$ alors on a $2^{k+1}=7^{2r}-3^{2r}=(7^r+3^r)(7^r-3^r)$
    Or $7^r+3^r\equiv 2[4]$ en plus $7^r+3^r\geq 4$ alors il ne peut pas être une puissance de 2.

D'où la seule solution du problème est $\begin{cases} n=5 \\ p=2 \\ q=1 \end{cases}$