Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

Sélections régionales 1er tour — Niveau 4AS — 26 janvier 2020

Corrigé

proposé par AMIMATHS

Enoncé de l'Exercice 1

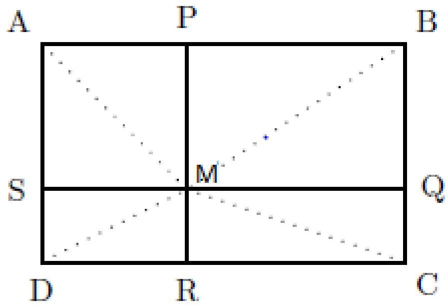
ABCD est un rectangle et M est un point situé à l'intérieur de ce rectangle.

1) Calculer $AM^2 - BM^2 + CM^2 - DM^2$.

2) Sachant que $AM = 119$, $BM = 375$ et $CM = 408$, calculer la distance DM.

Corrigé de l'Exercice 1 :

Soit P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de M sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$



On a d'après le théorème de Pythagore :

$AM^2 = AP^2 + MP^2 \qquad CM^2 = CQ^2 + MQ^2$

$BM^2 = BP^2 + MP^2 \qquad DM^2 = DR^2 + MR^2$

Or MP = AS, FQ = CR, MP = BQ et MR = DS;

On obtient

$AM^2 = AP^2 + AS^2 \qquad CM^2 = CQ^2 + CR^2$

$BM^2 = BP^2 + BQ^2 \qquad DM^2 = DR^2 + DS^2$

Mais DR = AP, AS = BQ, CR = BP et DS = CQ.

Alors

$AM^2 = AP^2 + BQ^2, \qquad CM^2 = CQ^2 + BP^2,$

$BM^2 = BP^2 + BQ^2, \qquad DM^2 = AP^2 + CQ^2.$

$AM^2 - BM^2 + CM^2 - DM^2 = AP^2 + BQ^2 - BP^2 - BQ^2 + CQ^2 + BP^2 - AP^2 - CQ^2$

$AM^2 - BM^2 + CM^2 - DM^2 = 0$

2) D'après 1) on a: $DM^2 = AM^2 + CM^2 - BM^2$

En remplaçant par les valeurs $AM = 119$, $BM = 375$ et $CM = 408$, on obtient : DM = 200.

Barème :	
1) Figure	4
Projections	4
Pythagore(s)	5
Egalité …= 0	5
2) DM	5
Présentation, rédaction et idées	2

Enoncé de l'Exercice 2

Soit a et b deux réels positifs et $a \neq 1$. On pose

$$F(a;b) = \frac{ab\sqrt{a} - ab - 25a\sqrt{a} - b\sqrt{a} + 25a + b + 25\sqrt{a} - 25}{a\sqrt{ab} + 5a\sqrt{a} - a\sqrt{b} - 5a - \sqrt{ab} - 5\sqrt{a} + \sqrt{b} + 5}$$

1) Calculer $F(a;4)$, $F(4;b)$ et $F(0;b)$.

2) Ecrire $F(a;b)$ sans radical au dénominateur.

3) Trouver b tel que $F(a;b) = 40$.

Corrigé de l'Exercice 2 :

1) $$F(a;4) = \frac{4a\sqrt{a} - 4a - 25a\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 25a + 4 + 25\sqrt{a} - 25}{a\sqrt{4a} + 5a\sqrt{a} - a\sqrt{4} - 5a - \sqrt{4a} - 5\sqrt{a} + \sqrt{4} + 5}$$

$$F(a;4) = \frac{(4a - 25a - 4 + 25)\sqrt{a} - 4a + 25a + 4 - 25}{(2a + 5a - 2 - 5)\sqrt{a} - 2a - 5a + 2 + 5} = \frac{(-21a + 21)\sqrt{a} + 21a - 21}{(7a - 7)\sqrt{a} - 7a + 7}$$

$$F(a;4) = \frac{(-21a + 21)\cancel{(\sqrt{a} - 1)}}{(7a - 7)\cancel{(\sqrt{a} - 1)}} = \frac{-21\cancel{(a - 1)}}{7\cancel{(a - 1)}} \Rightarrow \boxed{F(a;4) = -3}$$

$$* \ F(4;b)=\frac{4b\sqrt{4}-4b-25\times4\sqrt{4}-b\sqrt{4}+25\times4+b+25\sqrt{4}-25}{4\sqrt{4b}+5\times4\sqrt{4}-4\sqrt{b}-5\times4-\sqrt{4b}-5\sqrt{4}+\sqrt{b}+5}$$

$$F(4;b)=\frac{8b-4b-200-2b+100+b+50-25}{8\sqrt{b}+40-4\sqrt{b}-20-2\sqrt{b}-10+\sqrt{b}+5}=\frac{3b-75}{3\sqrt{b}+15}=\frac{\cancel{3}(b-25)}{\cancel{3}\left(\sqrt{b}+5\right)}$$

$$F(4;b)=\frac{\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}\left(\sqrt{b}-5\right)}{\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}}\Rightarrow\boxed{F(4;b)=\sqrt{b}-5}$$

Barème :

1) Calculs (3x3)	9
2) F(a,b) simplifié	8
3) Valeur de b	6
Présentation, rédaction et idées	2

$$* \ F(0;b)=\frac{0\times b\sqrt{0}-0\times b-25\times0\sqrt{0}-b\sqrt{0}+25\times0+b+25\sqrt{0}-25}{0\sqrt{0\times b}+5\times0\sqrt{0}-0\sqrt{b}-5\times0-\sqrt{0\times b}-5\sqrt{0}+\sqrt{b}+5}$$

$$F(0;b)=\frac{b-25}{\sqrt{b}+5}=\frac{\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}\left(\sqrt{b}-5\right)}{\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}}\Rightarrow\boxed{F(0;b)=\sqrt{b}-5}$$

2)

$$F(a;b)=\frac{ab\sqrt{a}-ab-25a\sqrt{a}-b\sqrt{a}+25a+b+25\sqrt{a}-25}{a\sqrt{ab}+5a\sqrt{a}-a\sqrt{b}-5a-\sqrt{ab}-5\sqrt{a}+\sqrt{b}+5}$$

$$F(a;b)=\frac{(ab-25a-b+25)\sqrt{a}-ab+25a+b-25}{\left(a\sqrt{b}+5a-\sqrt{b}-5\right)\sqrt{a}-a\sqrt{b}-5a+\sqrt{b}+5}=\frac{(ab-25a-b+25)\cancel{\left(\sqrt{a}-1\right)}}{\left(a\sqrt{b}+5a-\sqrt{b}-5\right)\cancel{\left(\sqrt{a}-1\right)}}$$

$$F(a;b)=\frac{a(b-25)-b+25}{a\left(\sqrt{b}+5\right)-\sqrt{b}-5}=\frac{(b-25)\cancel{(a-1)}}{\left(\sqrt{b}+5\right)\cancel{(a-1)}}=\frac{(b-25)}{\left(\sqrt{b}+5\right)}=\frac{\left(\sqrt{b}-5\right)\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{b}+5\right)}}$$

$$\boxed{F(a;b)=\sqrt{b}-5}$$

3) $F(a;b)=40\Rightarrow\sqrt{b}-5=40\Rightarrow\sqrt{b}=45\Rightarrow b=2025$.

<u>Enoncé de l'Exercice 3</u>

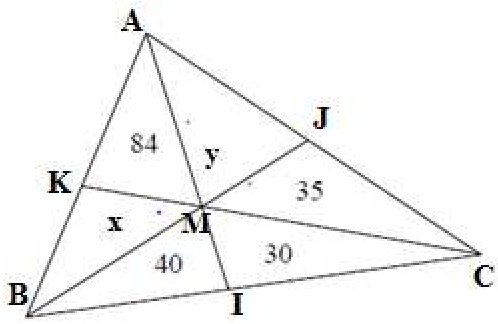
Dans la figure ci contre, les aires respectives des triangles AMK, KMB, BMI, IMC, CMJ et JMA sont 84 cm^2, $x\text{ cm}^2$, 40 cm^2, 30 cm^2, 35 cm^2 et $y\text{ cm}^2$

1.a) En utilisant les triangles AIB et AMB, montrer que :
$$\frac{AM}{IM}=\frac{84+x}{40}$$

b) Montrer que : $$\frac{35+y}{30}=\frac{84+x}{40}$$

c) Montrer que $MB=2MJ$.

2) Calculer x et y.



Corrigé de l'Exercice 3

1. a) Les triangles AIB et AMB ont une hauteur commune h_1 issue de B. Alors

$$\frac{\text{aire(AIB)}}{\text{aire (AMB)}}=\frac{\frac{1}{2}\times h_1\times AI}{\frac{1}{2}\times h_1\times AM}\text{ . D'où }\frac{84+x+40}{84+x}=\frac{AI}{AM}\text{ . Alors }\frac{84+x}{84+x}+\frac{40}{84+x}=\frac{AM}{AM}+\frac{MI}{AM}$$

$$\text{D'où }\frac{40}{84+x}=\frac{MI}{AM}\text{ . Enfin }\boxed{\frac{AM}{IM}=\frac{84+x}{40}}.$$

b) De la même manière, les triangles AMC et IMC ont une hauteur commune h_2 issue de C. Alors

$$\frac{\text{aire(AMC)}}{\text{aire (IMC)}}=\frac{\frac{1}{2}\times h_2\times AM}{\frac{1}{2}\times h_2\times IM}=\frac{35+y}{30}\Rightarrow\boxed{\frac{AM}{IM}=\frac{35+y}{30}}$$

On en déduit que $\boxed{\frac{35+y}{30}=\frac{84+x}{40}}$

c) Les triangles BMC et JMC ont une hauteur commune h_3 issue de C. Alors

$$\frac{\text{aire(BMC)}}{\text{aire (JMC)}}=\frac{\frac{1}{2}\times h_3\times MB}{\frac{1}{2}\times h_3\times MJ}=\frac{70}{35}\Rightarrow\boxed{\frac{MB}{MJ}=\frac{70}{35}\Rightarrow MB=2MJ}$$

Barème :	
1.a)	5
1.b)	5
1.c)	5
2)	8
Présentation, rédaction et idées	2

2) Les triangles AMB et AMJ ont une hauteur commune h_3 issue de A. Alors

$$\frac{\text{aire(AMB)}}{\text{aire (AMJ)}}=\frac{\frac{1}{2}\times h_4\times MB}{\frac{1}{2}\times h_4\times MJ}=\frac{84+x}{y}\Rightarrow\boxed{\frac{MB}{MJ}=\frac{84+x}{y}}$$

D'après les égalités précédentes :

$$\begin{cases}\frac{MB}{MJ}=2\\ \frac{MB}{MJ}=\frac{84+x}{y}\end{cases}$$

on a: $\frac{84+x}{y}=2$ d'où $x-2y=-84$

D'après 1.b) on a : $\frac{35+y}{30}=\frac{84+x}{40}$; ce qui donne $30x-40y=-1120$ soit $3x-4y=-112$.

Alors en résolvant le système $\begin{cases}x-2y=-84\\ 3x-4y=-112\end{cases}$ on obtient : x = 56 cm² et y = 70 cm².

Enoncé de l'Exercice 4

La roue avant d'une bicyclette du 19ème siècle a 80 cm de diamètre. Alors que la roue arrière a 50 cm de diamètre.
Quelle est la distance parcourue par la bicyclette sachant que la roue arrière a fait 78 tours de plus que la roue avant?

Corrigé de l'Exercice 4

La distance D parcourue par la bicyclette est égale celle parcourue par la roue avant et à celle parcourue par la roue arrière.
Or pendant un tour, une roue parcourt une distance égale à son périmètre. Soit N le nombre de tours de la roue avant et n celui de la roue arrière.
Alors $N\times\pi\times 80=n\times\pi\times 50$, soit $N\times 80=n\times 50$ or , $n=N+78$,
Par conséquent
$N\times 80=(N+78)\times 50\Rightarrow 80N=3900+50N\Rightarrow 30N=3900\Rightarrow\boxed{N=130}$
Donc la distance parcourue par la bicyclette est
$D=N\times\pi\times 80\text{ cm}=10400\pi\text{ cm}$.
Une valeur approchée de D, en prenant $\pi\approx 3{,}14$, est 32656 cm .

Barème :	
Relation distance-périmètre roue	8
Mise en équation	8
Nbr tours et distance	7
Présentation, rédaction et idées	2