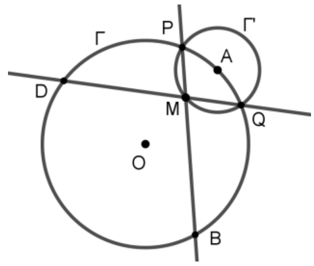
Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

1er tour **Niveau 7C** **20 janvier 2019**
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (20 points)



Soit A un point d'un cercle Γ de centre O et de rayon R.
Soit Γ' un cercle de centre A qui rencontre Γ en P et Q.
M un point de Γ' distinct de P et Q tel que (MP) recoupe Γ en B et (MQ) recoupe Γ en D. On cherche à démontrer par deux méthodes que : $(BD)\perp(AM)$.

1° Méthode 1 : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

a) Soit Δ_M une droite quelconque passant par M qui coupe Γ en E et F . Placer $E' = S_O(E)$ et montrer que $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = OM^2 - R^2$ (ce nombre est appelé la puissance du point M par rapport à Γ) .

b) Que peut-on dire de $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MD}$?

c) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

2° Méthode 2 : Angles orientés

a) Montrer que : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AQ}\right)+2\left(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MA}\right)=\pi$

b) Montrer que : $(BD)\perp(AM)$

Exercice 2 : (20 points)

Soit le nombre : $X=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1° Calculer X^3

2° Montrer que X est un entier naturel que l'on déterminera.

Exercice 3 : (20 points)

1° Soit $A=p^2(2p+1)^2$ où $p\in\mathbb{N}$. Déterminer les restes possibles de la division de A par 10.

2° Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+...+n^3$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Quel est le chiffre des unités de S_{2018} ?

c) Quel est le chiffre des unités de $\left(\dfrac{S_{2019}}{900}\right)^{2019}$?

Exercice 4 : (20 points)

Soient n un entier naturel non nul et α un réel.

1° Résoudre le système $\begin{cases}u^n+v^n=2\sin\alpha\\ uv=1\end{cases}$, où u et v sont des nombres complexes.

2° Résoudre le système $\begin{cases}(z_1+iz_2)^n+(z_1-iz_2)^n=2\sin\alpha\\ {z_1}^2+{z_2}^2=1\end{cases}$, où z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

Exercice 5: (20 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\a&2\end{pmatrix}$ où a est un réel non nul. On se propose de déterminer les réels x_n et y_n tels que $A^n=x_nA+y_nI_2$, où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.

1° Calculer A^2 et A^3.

2° Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=3x_n+y_n$ et $y_{n+1}=-2x_n$.

3° Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^n=\left(2^n-1\right)A+\left(2-2^n\right)I_2$.

4° Déterminer la matrice inverse de A^{2019}. **FIN.**