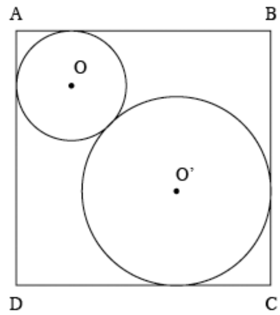
Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

$2^{ème}$ tour **Niveau 7C** **17 février 2019**

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée



Exercice 1: (20 points)

Soit $ABCD$ un carré de coté a. Un cercle $\Gamma(O,r)$ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle $\Gamma'(O',r')$, intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD). Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ'.

1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.

2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

Exercice 2: (20 points)

On se propose de déterminer tous les entiers n pour lesquels $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Si tel est le cas on pose $k=\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$.

1° Montrer que $4k^2n=k^4+5\times 24^2$.

2° En déduire qu'il existe un entier m tel que $km=24$.

3° Montrer que k est un entier pair.

4° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Exercice 3 : (20 points)

Soit n un nombre naturel. Notons P_n la propriété : « n^2-1 est multiple de 12 ».

1° Montrer que P_n est vraie si n est un nombre premier autre que 2 ou 3.

2° Donner un exemple de nombre composé (c'est-à-dire non premier) n pour lequel P_n est vraie et un autre pour lequel P_n est fausse.

3° Si n est composé, à quelle condition sur n la propriété P_n est-elle vraie ?

Exercice 4 : (20 points)

Soit p et q deux nombres rationnels strictement positifs. Pour tout $x\in[0;1[$, on pose, $f_{p;q}(x)=\int_0^x t^p(1-t)^q\,dt$.

1° Montrer que : $(1+p)f_{p;q}(x)-qf_{p+1;q-1}(x)=x^{p+1}(1-x)^q$

2° En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

3° Montrer que : $(p+q)(1+p+q)f_{p;q}(x)-pqf_{p-1;q-1}(x)=x^p(1-x)^q((p+q)x-q)$

Exercice 5 : (20 points)

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont toutes différentes : $BC=a$, $AC=b$ et $AB=c$. On note Δ_a la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et δ_a sa bissectrice extérieure.

1° I_a et J_a sont les points d'intersection de (BC) respectivement avec Δ_a et δ_a.

a) Calculer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a.

b) En déduire que : $I_a=\text{bar}\{(B,b);(C,c)\}$. Montrer aussi que : $J_a=\text{bar}\{(B,-b);(C,c)\}$.

2° Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Montrer que : $I=\text{bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

3° Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, N un point du segment $[AB]$ et P le point du segment $[BC]$ tels que : $AN=CP$. Les droites (AP) et (CN) se coupent en Q. Montrer que la droite (DQ) est bissectrice de l'angle ADC.

FIN.