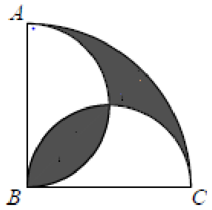
République Islamique de Mauritanie — **Honneur – Fraternité – Justice**
Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2019

Final — **Niveau 7C** — **17 mars 2019**
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

<u>Exercice</u> 1: (20 points)



Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle avec $BA = BC = a$.
Calculer l'aire grisée.

<u>Exercice 2</u> : (20 points)

Soit un entier $n \geq 2$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$; le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est impair et non premier.

2) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

3) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a toujours un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

<u>Exercice 3</u> : (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x \cos x}} dx$

1) On pose $g(x) = \sin x$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $x = \frac{\pi}{4} + y$, vérifier que $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{2 + \cos(2y)}} dy$

3) En posant $z = \sin y$, montrer que $I = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dz}{\sqrt{3 - 2z^2}}$

4) Exprimer alors la valeur de I en utilisant g^{-1} .

<u>Exercice</u> 4 : (20 points)

Soit f la fonction définie par $f(t) = \frac{t-1}{t \ln t}$ si $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$ et $f(1) = 1$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ puis justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$.

2) Utiliser $\int_x^{x^2} f(t) dt$ pour calculer $\lim_{x \to 1} \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \right)$.

<u>Exercice</u> 5: (20 points)

ABC est un triangle d'angles aigus et dont les hauteurs $[AD]$ et $[BE]$ se coupent en H. soit $[M]$ le milieu de $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles DEM et ABH se coupent en P et Q avec P est le point situé dans le demi-plan délimité par (CH) contenant A. On désigne par R le point d'intersection de (ED) et (PH) .

1) Montrer que $RDA = RPA$ puis déduire que les points B, P, R et E sont cocycliques.

2) Montrer que R appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Montrer que les droites (ED), (PH) et (MQ) sont concourantes en R.

FIN.