République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif.
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2022

1er tour **Niveau 7C** **30 janvier 2022**
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (25 points)

Dans un désert il y a des serpents, des souris et des scorpions. Un monde sans pitié.
Chaque matin, chaque serpent mange une souris.
Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (piqûre mortelle).
Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.
Le matin du cinquième jour il ne reste plus qu'un animal : une souris.
Soient x_n, y_n et z_n respectivement le nombre de souris, de serpents et de scorpions au début de la matinée du $n^{\text{ième}}$ jour. Le nombre n prend les valeurs 1, 2, …5.

1) Ecrire x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

2) On considère les matrices : $M\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & -8 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} 60 & 28 & 41 \\ 41 & 19 & 28 \\ 28 & 13 & 19 \end{pmatrix}$. Calculer le produit MN.

3) Utiliser un calcul matriciel pour déterminer combien y avait-il d'animaux de chaque sorte au début de la matinée du premier jour.

Exercice 2: (25 points)

Dans le plan orienté on considère les points, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ tels que pour tout entier $n \geq 4$, $A_n = A_{n-3}$ et la suite des points $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} soit l'image de M_n par la rotation de centre A_{n+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note a_n l'affixe du point A_n et z_n celle de M_n.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n et a_{n+1}.

2. Justifier que $z_{3n+3} = z_{3n} + (1-j)\left(a_3 + ja_2 + j^2a_1\right)$.

3. Montrer que si $M_{2022} = M_0$ alors le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Exercice 3: (25 points)

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers du nombre $A(n) = n^4 + 1$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Étudier la divisibilité de A(n) par 2 et sa divisibilité par 3.

b) Soit d un diviseur de A(n), montrer que d et n sont premiers entre eux et que $n^8 \equiv 1 [d]$.

2. Soit d un diviseur de A(n). On note p le plus petit entier naturel non nul tel que $n^p \equiv 1 [d]$.

a) Montrer que si $n^k \equiv 1 [d]$ alors p divise k puis en déduire que p divise 8.

b) Montrer que si, de plus, d est premier, alors p divise $d-1$.

3. Déterminer les diviseurs premiers de A(12).

Exercice 4: (25 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équations $\begin{cases} x = 9y^3 - 54y^2 + 108y - 70 \\ y = 9x^3 - 54x^2 + 108x - 70 \end{cases}$.

Fin.