République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Reforme
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

$2^{\text{ème}}$ tour — **Niveau 4AS** — **14 mars 2021**
Durée 3 h

> *L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.*
> *Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.*
> **Calculatrice non autorisée**

Exercice 1: (25 points)

Soit x un réel positif. On donne : $A(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{5x+9+6\sqrt{5x}}}$.

1) Montrer que $A(5)-2A(0)=0$

2) Ecrire $A(x)$ sous la forme $\sqrt{x}+\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.

3) Simplifier le nombre $B=\sqrt{403+2\sqrt{2029+6\sqrt{2020}}}$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

Exercice 2: (25 points)

1) Soit a, b, u et v de $\mathbb{R}_+^*$

Montrer que $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}\geq\frac{(a+b)^2}{u+v}$. Quand est-ce qu'on a l'égalité ?

2) Pour tout x, y, et z de $\mathbb{R}_+^*$, prouver que $\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{x^2+z^2}{y}+\frac{y^2+z^2}{x}\geq 2(x+y+z)$

3) Déduire que $\frac{22+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}+\frac{24+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}+\frac{20+4\sqrt{5}+6\sqrt{2}}{1+2\sqrt{3}}\geq 12+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

Exercice 3: (25 points)

1) Soit ABCD l'écriture décimale d'un entier naturel P de 4 chiffres (D est le chiffre d'unités, C celui de dizaines, …) telle que

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times\quad 9 \\ \hline =DCBA \end{array}$$

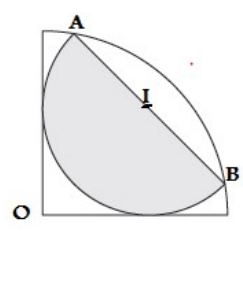
a. Déterminer, avec justification, le chiffre A puis montrer que $B=0$.
b. Justifier que $C=8$ et en déduire le nombre P .
2) Existe-il un entier naturel à 4 chiffres d'écriture décimale ABCD telle que

$$\begin{array}{r} ABCD \\ \times\quad 7 \\ \hline =DCBA \end{array}$$

Justifier.

Exercice 4: (25 points)

La figure ci-contre représente un demi-cercle (colorié), inscrit dans un quart de cercle. Soit I le centre du demi-cercle et O celui du quart de cercle et soit $[AB]$ un diamètre du demi- cercle.



1) Montrer que $OI^2=2AI^2$

2) Montrer que $OA=\sqrt{3}\times IA$

3) Déduire la valeur de fraction $\frac{\text{aire coloriée}}{\text{aire non coloriée}}$

Fin.