République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Reforme
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

1er tour — **Niveau 7C** — 28 février 2021

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (25 points)

On considère les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&-4&1\\2&4&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

1) Calculer AB, AC et AD.
2) Trouver toutes les matrices carrées M d'ordre 3 telles que AM=0 (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 2: (25 points)

1) Résoudre l'équation $Z^2-104Z+4913=0 \quad (E)$.

2) Soit z_1 et z_2 deux complexes tels que $z_1z_2=17$ et soit $x=z_1+z_2$.

Montrer que $x^3=51x+104$ si et seulement si z_1^3 et z_2^3 sont les solutions de l'équation (E).

3) On appelle entier de Gauss tout nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers relatifs. C'est-à-dire : $z=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{Z}$.

Montrer que les solutions de (E) sont des cubes d'entie0rs de Gauss.

4) En déduire que l'équation $x^3=51x+104$ a une solution entière que l'on déterminera.

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et on note D, E et F les pieds de ses hauteurs issues respectivement de A, B et C

Les cercles inscrits dans les triangles BDF et CDE sont notés Γ_B et Γ_C. Soit I et J leurs centres respectifs.

La droite (DF) est tangente à Γ_B au point M.

La droite (DE) est tangente à Γ_C au point N.

La droite (MN) recoupe les cercles Γ_B et Γ_C en P et Q respectivement ($P\neq M$ et $Q\neq N$).

1) Faire une figure.

2) Montrer que $(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DI})=(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DN}) \quad [\pi]$.

3) Montrer que $PM=QN$.

Exercice 4: (25 points)

Soit n un entier naturel strictement positif. x et y deux réels positifs tels que $x^n+y^n=1$.

1) Montrer que pour tout réel $t\in\,]0,1[$: $\dfrac{1+t^2}{1+t^4}<\dfrac{1}{t}$.
2) Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}\right)<\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

Fin.