République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Technique et de la Reforme
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2021

2ème tour — **Niveau 7C** — 14 mars 2021
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée

Exercice 1: (25 points)

Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1.a) Déterminer les solutions de l'équation $z^n = 1$.

b) Calculer le produit des solutions de l'équation précédente.

2.a) Soit $p \geq 0$. Calculer la somme $S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

b) On pose $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$. Montrer que $S_2 = 2n$.

Exercice 2: (25 points)

Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$

1) Calculer a_6, b_6 et le $\mathrm{pgcd}(a_6, b_6)$.

2.a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

b) Montrer que, pour tout entier n non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 3: (25 points)

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et Γ un cercle dont le centre L est situé sur le segment $[BC]$. On suppose que le cercle Γ est tangent à (AB) en B' et à (AC) en C'. On suppose aussi que le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur le petit arc $B'C'$ du cercle Γ. Soit x, y et z les mesures en degré respectivement des angles géométriques $\widehat{COB}$, $\widehat{C'OB'}$ et $\widehat{CAB}$; $x, y, z \in [0,180]$.

1.a) Justifier que $x < y$.

b) Montrer que $2y - z = 180°$ puis en déduire que $z < 60°$.

2) Montrer que le cercle Γ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points.

Exercice 4: (25 points)

1) Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs. Montrer que :

a) $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{1}{(2x+y+z)^2} \leq \dfrac{1}{4(x+y)(x+z)}$.

2) Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = a+b+c$.

Montrer que : $$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Fin.