

Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales
1^{er} tour

Niveau 4AS

05 février 2017
Durée 3 h

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants ;
Toute réponse devra être accompagnée d'une justification ;
Les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (5 points)

Soit

$$A = (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 - (x-4)^2 + (x-5)^2 - (x-6)^2 + (x-7)^2 - (x-8)^2 + (x-9)^2 - (x-10)^2$$

- 1) Calculer A pour $x = 0$.
- 2) Simplifier A.

Exercice 2 (5 points)

- 1) Montrer que $\sqrt{10+\sqrt{19}} + \sqrt{10-\sqrt{19}} = \sqrt{38}$
- 2) Déterminer un réel x tel que $\sqrt{10+\sqrt{19}} - \sqrt{10-\sqrt{19}} = \sqrt{x}$.

Exercice 3 (5 points)

ABC est un triangle tel que $AC = 13$, $AB = 14$ et $BC = 15$. On pose $BJ = x$.
L'unité de longueur est le centimètre. Soit H, J, K les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets C, A, B.

1. a) Ecrire deux égalités de Pythagore faisant intervenir AJ.
b) Déduire x de la question a. puis calculer AJ.
- 2) Calculer BK et CH.
- 3) Proposer un triangle dont les trois côtés et les trois hauteurs ont pour longueurs des nombres entiers.

Exercice 4 (5 points)

Dans le carré ci-contre (carré magique), les nombres inscrits dans les cases sont des réels strictement positifs. Le produit des nombres inscrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chacune des deux diagonales est le même. Déterminer f.

1	64	d	g
a	4	16	4
8	2	e	h
b	c	f	32

Fin.