

## Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

2<sup>ème</sup> tour

Niveau 4AS

23 février 2020

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;  
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;

**Calculatrice non autorisée**

### Exercice 1 : (25 points)

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x, on a :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x^2 - a)^2 - b$$

2) En déduire que  $\sqrt{2014 \times 2016 \times 2018 \times 2020 + 16} = 2017^2 - 5$

### Exercice 2 : (25 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A. E est le symétrique de A par rapport à C. F est le symétrique de E par rapport à B. Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Les points R et S sont les projetés orthogonaux respectifs de F sur (AB) et (AE).

1) Faire une figure.

2) Montrer que l'aire du triangle AFB est le double de celle de ABC.

3) Montrer que FS = EK.

4) Montrer que FREK est un parallélogramme.

### Exercice 3 : (25 points)

Un marchand dispose d'un stock contenant x bananes. Au premier jour il a mangé une banane et il a vendu la moitié du reste. Au deuxième jour il a mangé 2 bananes et il a vendu les  $\frac{2}{3}$  du reste. Au troisième jour il a mangé 3 bananes et il a vendu les  $\frac{3}{4}$  du reste. Au quatrième jour il a mangé 4 bananes et il a vendu les  $\frac{4}{5}$  du reste. Au cinquième jour il a mangé 5 bananes et il a vendu les  $\frac{5}{6}$  du reste. Au sixième jour il constate qu'il n'a plus que 6 bananes.

1) Montrer que le nombre de bananes restant à la fin du troisième jour est  $\frac{x-23}{24}$ .

2) Exprimer en fonction de x le nombre total de bananes vendues pendant les quatre premiers jours.

3) Calculer x.

### Exercice 4 : (25 points)

Dans l'opération suivante, chaque lettre représente toujours le même chiffre. Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. Aucun des nombres représentés par un mot ne commence par zéro. Quels chiffres se cachent derrière chacune de ces lettres ?

	T	I	G	R	E	
+	L	I	O	N	N	E
=	T	I	G	R	O	N

Fin.