République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Cellule de la télévision scolaire

Honneur – Fraternité – Justice

Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales
1er tour

Niveau 7C

05 février 2017
Durée 3 h

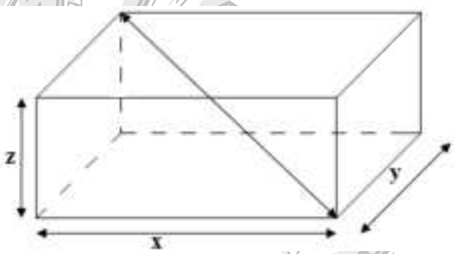
L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse devra être accompagnée d'une justification ;
Les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (4 points)

1) Vérifier que, pour tous réels $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ on a :
$\mathbf{(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.}$

2) La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est $\mathbf{22cm^2}$ et la somme des longueurs de ses arêtes est $\mathbf{24cm}$.
Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.



Exercice 2 (4 points)

Soient α et β deux réels.

1) Développer, réduire et factoriser l'expression $\mathbf{(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2}$.

2) Soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ des entiers naturels. Le triplet $(\mathbf{x,y,z})$ est pythagoricien si, et seulement si $\mathbf{x^2+y^2=z^2}$.
Utiliser 1) pour donner trois exemples (non proportionnels) de triplets pythagoriciens.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$. On considère le point $\mathbf{A(-1+i)}$ et la suite de points $\left(\mathbf{M_n(z_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\mathbf{z_0=0}$ et $\mathbf{z_{n+1}=\frac{1}{2}(1+i)z_n+i}$.

1) Montrer que le triangle $\mathbf{AM_nM_{n+1}}$ est rectangle.

2) Montrer que les points $\mathbf{M_n}$ restent sur quatre droites fixes. Sur quelle droite se trouve le point $\mathbf{M_{2017}}$?

3) On pose : $\mathbf{L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n}$. Calculer $\mathbf{L_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{L_n}$.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit **PQRS** un trapèze de bases $[\mathbf{PS}]$ et $[\mathbf{QR}]$ dont les diagonales se coupent en **E**. Montrer que les triangles **PQE** et **RSE** sont de même aire.

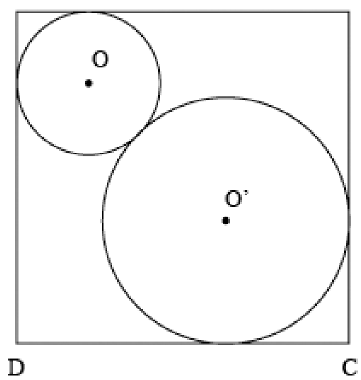
2) Soit **ABC** un triangle acutangle (à angles aigus). La bissectrice intérieure de l'angle **A** coupe $[\mathbf{BC}]$ en **L** et recoupe le cercle circonscrit au triangle **ABC** en **N**. Les projetés orthogonaux de **L** sur $(\mathbf{AB})$ et $(\mathbf{AC})$ sont notés respectivement **F** et **D**. La parallèle à $(\mathbf{NC})$ menée de **D** coupe $(\mathbf{BC})$ en **I**.

a) Montrer que $(\mathbf{FI})$ est parallèle à $(\mathbf{BN})$.

b) Montrer que le triangle **ABC** et le quadrilatère **AFND** sont de même aire.

Exercice 5 (4 points)

Soit un carré **ABCD** de coté $\mathbf{a}$.
Un cercle Γ intérieur au carré est tangent à $(\mathbf{AB})$ et $(\mathbf{AD})$. Un second cercle Γ', intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites $(\mathbf{CB})$ et $(\mathbf{CD})$.
Soit $\mathbf{S}$ la somme des aires des cercles Γ et Γ' : qu'elles sont les valeurs maximale et minimale de $\mathbf{S}$?



Fin.