République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire
et de la Formation Technique et Professionnelle
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

1er tour | **Niveau 7C** | **26 janvier 2020**
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1

On donne la matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A tout réel x on associe la matrice $M(x) = I_3 + xA + \frac{1}{2}x^2A^2$

1) Calculer A^2 **et** A^3 **et en déduire, pour tout entier** $n > 3$**, la valeur de** A^n**.**
2) Montrer que $M(x)M(y) = M(x+y)$**.**
3) Soit n un entier naturel. Ecrire les matrices $M(x)$ **et** $(M(x))^n$ **sous forme de tableaux.**

Exercice 2

Soit Γ **et** Γ' **deux cercles qui se coupent en A et B. Les tangentes en A à** Γ **et** Γ' **recoupent respectivement** Γ' **et** Γ **en D et C et la droite** (CD) **recoupe le cercle** Γ **en un point M différent de B. On se propose de montrer que la droite** (MB) **passe par le milieu du segment** $[AD]$

1) Soit N **le point d'intersection de** (BM) **avec** Γ'**. Donner une mesure de l'angle** $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CD})$**.**
2) Déterminer la nature du quadrilatère $AMDN$ **puis conclure.**

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$**, les complexes** z_1 **et** z_2 **de module 1 et d'arguments respectifs** α **et** β.

1) Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ **est un réel positif ou nul.**

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$**, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b (on suppose que les points O, A et B ne sont pas alignés). Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre du système** $\{(A,|b|);(B,|a|)\}$**.**

3.a) A l'aide de la question 1), montrer que $\frac{z^2}{ab}$ **est un réel strictement positif.**
b) Exprimer $\arg z$ **en fonction de** $\arg a$ **et** $\arg b$.
c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ **est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle** $\widehat{AOB}$**.**

Exercice 4

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1) Le triangle ABC est équilatéral
2) j **ou** j^2 **est racine de l'équation** $az^2+bz+c=0$
3) $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$
4) $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ **:** $\quad \text{ppcm}(x,y) - \text{pgcd}(x,y) = 243$**.**

Fin.