République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Cellule de la télévision scolaire

Honneur – Fraternité – Justice

Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales
$2^{ème}$ tour

Niveau 7C

26 février 2017
Durée 3 h

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée ;
Les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (4 points)

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x)=a-\sqrt{x+b}$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u)=v$ et $f(v)=u$.

1) Montrer que **2** et **3** sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de **4** et **7** ?
3) A quelle condition deux entiers **n** et **m** sont-ils échangeables ?

Exercice 2 (4 points)

Dans un livre, les pages sont numérotées de 1 à n, et de gauche à droite. La page numérotée 1 est une page de gauche. On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2017. Mais une feuille du livre a été perdue et les numéros des ses pages n'ont pas été comptés.
Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages de la feuille perdue ?

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle direct. On considère les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. On note I le point d'intersection de (AP) et (CR), J le point d'intersection de (AP) et (BQ) et K celui de (BQ) et (CR).

1.a) Exprimer I , J et K comme barycentre de A, B et C.
b) Montrer que : I est le milieu de $[CK]$, J est le milieu de $[AI]$ et K est le milieu de $[BJ]$
2.a) Montrer qu'une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.
b) Exprimer l'aire de IJK en fonction de l'aire de ABC.

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f .
2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n en fonction de n .

Exercice 5 (4 points)

On donne un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[CD]$. M étant un point du segment $[AB]$, on trace (CM), qui recoupe le cercle en N . La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P .

Montrer que $OP = CM$.

Fin.