Olympiades Nationales de Mathématiques 2008

Proposition de solution de l'épreuve préparatoire
Sélection régionale

29 février 2008
Durée 4h30min

Exercice N°1

Simplifier : $A=\dfrac{a(-b+c-a)^2-b(c+a+b)^2+c(a-b-c)^2+(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}{a^2(-b+c-a)+b^2(c+a+b)+c^2(a-b-c)-(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}$

Une 1ère solution de l'exercice N°1

Nous remarquons que pour a, b et c non tous nuls, l'expression du numérateur et du dénominateur reste homogène si l'on remplace b par $-b$. Pour cela on pose $a=x$, $b=-y$ et $c=z$.

On a :

$$A=F(x,y,z)=\frac{x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}{x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z)-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$$

$$A=\frac{N(x,y,z)}{D(x,y,z)}$$

On remarque que: $N(x,y,0)=0$, $N(x,0,z)=0$ et $N(0,y,z)=0$ on en déduit que $N(x,y,z)$ est divisible par x, y et z donc par le produit xyz.

$N(x,y,z)$ est un polynôme homogène du troisième degré divisible par xyz d'où l'existence d'un réel α tel que : $N(x,y,z)=\alpha\, xyz$.

De plus $N(1,1,1)=4$, ainsi $\alpha=4$ donc $N(x,y,z)=4xyz$.

De manière analogue on trouve $D(x,y,z)=2xyz$. Donc $A=2$

Une 2ème solution de l'exercice N°1

Il suffit de développer :

- le numérateur

$\mathbf{N(a,b,c)=a(-b+c-a)^2-b(c+a+b)^2+c(a-b-c)^2+(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}$ après simplification on trouve $\mathbf{N(a,b,c)=-4abc}$

- le dénominateur on trouve :

$\mathbf{D(a,b,c)=a^2(-b+c-a)+b^2(c+a+b)+c^2(a-b-c)-(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}$ après simplification on trouve $\mathbf{D(a,b,c)=-2abc}$

Enfin $\mathbf{A=2}$

Exercice N°2 (5 points)

Résoudre, l'équation suivante :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots\cfrac{}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}}}}=x$$

2008 barres de fractions

Une solution de l'exercice N°2

Nous remarquons que pour avoir une barre de fraction supplémentaire (pour avoir 2009 barres de fractions) il suffit de remplacer le dernier x par $1+\frac{1}{x}$. L'équation $E(1)$: $1+\frac{1}{x}=x$ est équivalente à l'équation $E(2)$: $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=x$ et ainsi de suite jusqu'à trouver l'équation $E(2008)$. Toutes ces équations sont équivalentes et ont les mêmes solutions qui sont celles de $E(1)$.

Or $E(1)$ est équivalente à l'équation $x^2-x-1=0$ dont les solutions sont le nombre d'or $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son conjugué $\varphi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice N°3

Construire un triangle ABC rectangle en A, connaissant l'hypoténuse $BC=a$, et sachant que : $AI^2=AB\times AC$ où I est le milieu de $[BC]$.

Une 1ère solution de l'exercice N°3

L'objectif de l'exercice est de déterminer la position du point A.

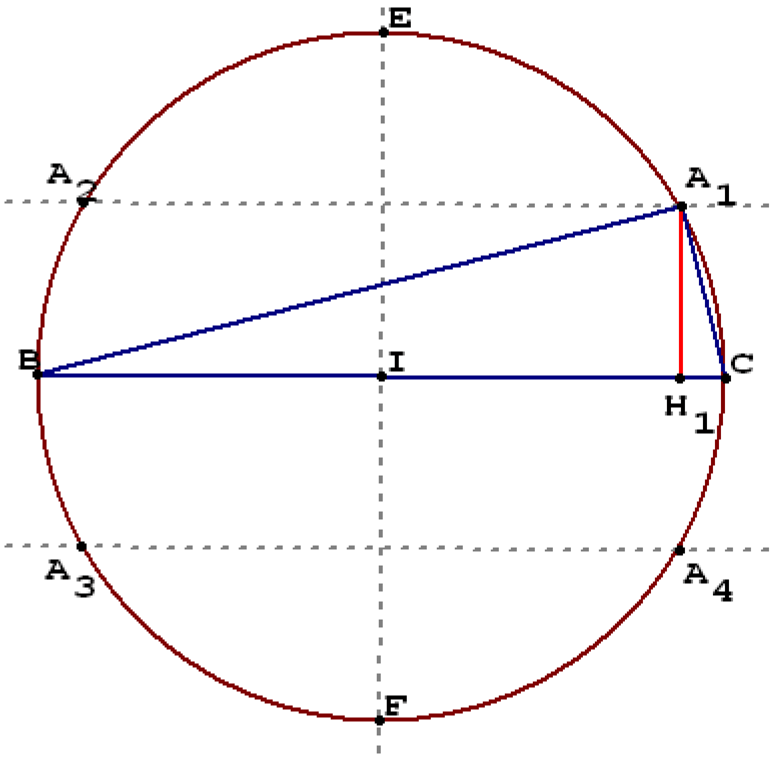
Le point A est sur le cercle (C) de diamètre $[BC]$ d'où $AI^2=\frac{BC^2}{4}=\frac{a^2}{4}$ de plus on a que $AI^2=AB\times AC$ ainsi on trouve : $AB\times AC=\frac{a^2}{4}$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On a $AB\times AC=AH\times BC$ d'où $AH\times BC=\frac{a^2}{4}$ donc $AH=\frac{a}{4}$.

La construction du point $\mathbf{A}$.

On construit le cercle $(\mathbf{C})$ puis la droite (Δ) médiatrice du segment $[\mathbf{BC}]$. La droite (Δ) coupe $(\mathbf{C})$ en deux points $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$.

Les médiatrices des segments $[\mathbf{EI}]$ et $[\mathbf{FI}]$ coupent $(\mathbf{C})$ en quatre points qui représentent des positions possibles du point $\mathbf{A}$.



<u>Une 2ème solution de l'exercice N°3</u>

De l'égalité $\mathbf{AI^2 = \frac{BC^2}{4}}$ on trouve $\mathbf{AB \times AC = BC^2}$ d'où $\mathbf{2\frac{AC}{BC} \times \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}}$ c'est-à-dire $\mathbf{2\sin\hat{B} \times \cos\hat{B} = \frac{1}{2}}$ donc $\mathbf{\sin(2\hat{B}) = \frac{1}{2}}$.

De l'égalité $\mathbf{\sin(2\hat{B}) = \frac{1}{2}}$ on trouve $\mathbf{2\hat{B} = 30°}$ donc $\mathbf{\hat{B} = 15°}$.

Le triangle $\mathbf{ABC}$ étant rectangle en $\mathbf{A}$ on trouve $\mathbf{\hat{C} = 75°}$.

Compte tenu de l'orientation du triangle $\mathbf{ABC}$ (direct ou indirect) et du fait que l'on peut permuter $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ on trouve un total de quatre solutions (les quatre positions possibles du point A) pour ce problème.

Une 3ème solution de l'exercice N°3

On a $\mathbf{AB \times AC = AI^2 = \frac{BC^2}{4}}$ et on sait que $\mathbf{\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}}$ où $\mathbf{H}$ est le pied de la hauteur issue de $\mathbf{A}$ dans le triangle $\mathbf{ABC}$ donc $\mathbf{AB \times AC = AH \times BC}$.

De l'égalité $\mathbf{AB \times AC = AH \times BC}$ on déduit que $\mathbf{AH \times BC = \frac{BC^2}{4}}$ et que $\mathbf{\frac{AH}{BC} = \frac{1}{4}}$ donc $\mathbf{\frac{AH}{2AI} = \frac{1}{4}}$ d'où $\mathbf{\frac{AH}{AI} = \frac{1}{2}}$.

Si les angles du triangle $\mathbf{ABI}$ sont aigus alors $\mathbf{H \in [IB]}$ on trouve $\mathbf{A\hat{I}B = 30°}$ ce qui donne une position du point $\mathbf{A}$. De cette position on déduit, par symétrie, les trois autres positions possibles de $\mathbf{A}$.

Exercice N°4

Dans un livre, les pages sont numérotées de **1** à **n**, et de gauche à droite. La page numérotée **1** est une page de gauche. On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à **2009**. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.

Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?

Une solution de l'exercice N°4

Soit **n** le nombre de pages du livre. Le numérotage des pages étant de gauche à droite et la page 1 étant une page de gauche (de droite à gauche pour la version arabe), nous pouvons remarquer que les pages collées sont une page de numéro impair $\mathbf{2p\text{-}1}$ et une page de numéro pair $\mathbf{2p}$ qui sont sur deux feuilles distinctes et qui se suivent.
Donc la somme de tous les nombres de **1** à **n**, hormis $\mathbf{2p\text{-}1}$ et $\mathbf{2p}$, est égale à **2009**, soit :

$$\mathbf{\frac{n(n+1)}{2} - (4p-1) = 2009} \quad (1).$$

Or $\mathbf{2 \leq 2p \leq n}$ d'où $\mathbf{1 \leq 2p - 1 \leq n - 1}$ ainsi $\mathbf{3 \leq 4p - 1 \leq 2n - 1}$ donc $\mathbf{-2n + 1 \leq -(4p - 1) \leq -3}$

On en déduit que $\mathbf{\frac{n(n+1)}{2} - 2n + 1 \leq \frac{n(n+1)}{2} - (4p-1) \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3}$

Et donc $\mathbf{\frac{n^2 - 3n + 2}{2} \leq 2009 \leq \frac{n^2 + n - 6}{2}}$.

double inégalité qui conduit aux deux inéquations $\begin{cases} \mathbf{n^2 - 3n - 4016 \leq 0} \\ \mathbf{n^2 + n - 4024 \geq 0} \end{cases}$

La première inégalité donne $\mathbf{n \leq \frac{3 + \sqrt{16073}}{2}}$ d'où $\mathbf{n \leq 64{,}88}$ et la deuxième inégalité donne $\mathbf{n \geq \frac{-1 + \sqrt{16097}}{2}}$ d'où $\mathbf{n \geq 62{,}94}$.

On a finalement $\mathbf{62{,}94 \leq n \leq 64{,}88}$ or $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ d'où $\mathbf{n}$ est soit égale à $\mathbf{63}$ ou à $\mathbf{64}$

De l'égalité (1) on a $\mathbf{2p = \frac{n(n+1)}{4} - 1004}$

Si $\mathbf{n = 63}$ alors $\mathbf{2p = 4}$ c'est-à-dire que les pages collées sont $\mathbf{3}$ et $\mathbf{4}$.

Si $\mathbf{n = 64}$ alors $\mathbf{2p = 36}$ c'est-à-dire que les pages collées sont $\mathbf{35}$ et $\mathbf{36}$.

En conclusion

Si $\mathbf{n=63}$, le livre a **63** pages et les pages $\mathbf{3}$ et $\mathbf{4}$ sont collées

Et si $\mathbf{n=64}$ le livre a **64** pages et les pages $\mathbf{35}$ et $\mathbf{36}$ sont collées.