Olympiades Nationales de Mathématiques 2008

Proposition de solution de l'épreuve finale
1er jour

16 mars 2008
Durée 4h30min

Exercice N°1

Soit $f_1(x)=\frac{1+x}{1-x}$ et pour tout entier naturel $n\geq 2$ on pose : $f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$

Calculer $f_{2008}(2008)$.

Une solution de l'exercice 1

On a $f_1(x)=\frac{1+x}{1-x}$ d'où $f_1(x)=f_1(f_1(x))=\frac{-1}{x}$

$$f_3(x)=f_1(f_2(x))=\frac{-1}{f_1(x)}$$
$$f_4(x)=f_1(f_3(x))=x$$
$$f_4(x)=f_1(x)$$
$$f_5(x)=f_1(x)$$

Alors f est périodique de période **4** d'où $f_{2008}=f_{4\times 502}=id$ donc $f_{2008}(2008)=2008$

Exercice N°2

On sait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Etant données trois droites du plan concourantes en un même point, construire alors un triangle dont les médiatrices sont ces trois droites.

Une solution de l'exercice 2

Soient D_1, D_2, et D_3 trois droites concourantes en O. On construit Trois droites deux à deux sécantes d_1, d_2 et d_3 tels que $d_1\perp D_1$, $d_2\perp D_2$ et $d_3\perp D_3$.
Soient A, B et C leurs points d'intersection et soit E le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. L'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{EO}$ est solution du problème.

Exercice N°3

Trouver toutes les valeurs du paramètre réel $\mathbf{a}$, pour lesquelles l'équation :

$$16x^4 - ax^3 + (2a+17)x^2 - ax + 16 = 0 \quad (1)$$

a exactement quatre racines réelles distinctes qui forment une progression géométrique.

Une solution de l'exercice 3

On pose $P(x) = 16x^4 - ax^3 + (2a+17)x^2 - ax + 16$

Soient x_1, x_2, x_3 et x_4 les solutions éventuelles de l'équation (1) et soit q la raison de la progression géométrique formée par x_1, x_2, x_3 et x_4.

On a $x_2 = qx_1$, $x_2 = q^2x_1$ et $x_2 = q^3x_1$. Les solutions étant distinctes on a $x_1 \neq 0$ et $q \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$.

D'autre part $P(\frac{1}{x}) = \frac{P(x)}{16}$ donc si x est solution de (1) alors $\frac{1}{x}$ est aussi solution (1).

Les solutions de (1) sont x_1, $x_2 = qx_1$, $x_2 = q^2x_1$ et $x_2 = q^3x_1$ mais aussi $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{qx_1}$, $\frac{1}{q^2x_1}$ et $\frac{1}{q^3x_1}$.

Les racines se correspondent comme suit : $x_1 = \frac{1}{q^3x_1}$; $x_2 = \frac{1}{q^2x_1}$; $x_3 = \frac{1}{qx_1}$ et $x_4 = \frac{1}{x_1}$.

Par suite $x_1^2q^3 = 1$ on peut alors écrire $q = x_1^{-\frac{2}{3}}$.

On peut alors écrire les solutions comme suit : x_1 ; $x_2 = x_1^{\frac{1}{3}}$; $x_3 = x_1^{-\frac{1}{3}}$ et $x_3 = x_1^{-1}$.

Le polynôme $P(x)$ peut s'écrire alors sous la forme : $P(x) = 16(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4$

En tenant compte des relations liant ces racines, on a :

$$P(x) = 16\left[x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + (2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4)x^2 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x + x_1x_2x_3x_4\right]$$

Par identification $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{a}{16}$ d'où $x_1 + x_1^{\frac{1}{3}} + x_1^{-\frac{1}{3}} + x_1^{-1} = \frac{a}{16} \qquad (2)$

Les coefficients de x^2 donne $x_1^{\frac{4}{3}} + x_1^{-\frac{4}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}} + x_1^{-\frac{2}{3}} + 2 = \frac{2a+17}{16} \qquad (3)$.

En posant $z = x_1^{\frac{1}{3}} + x_1^{-\frac{1}{3}}$

De (2) on trouve : $z^3-2z=\frac{a}{16}$ et de (3) on trouve $z^4-2z^2=\frac{2a-15}{16}=2\frac{a}{16}-\frac{15}{16}$ (4) .

En remplaçant $\frac{a}{16}$ par z^3-2z dans (4) on trouve $z^4-2z^3-3z^2+4z+\frac{15}{16}=0$.

$z^4-2z^3-3z^2+4z+\frac{15}{16}=0$ équivaut à $(4z^2-4z-15)(4z^2-4z-1)=0$

Dont les solutions sont : $z_1=-\frac{3}{2}$; $z_2=\frac{5}{2}$; $z_3=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ et $z_4=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Nous avons $a=16z^3-32z$ donc les valeurs possibles de a sont :

$a_1=16z_1^3-32z_1=-6$; $a_2=16z_2^3-32z_2=170$; $a_3=16z_3^3-32z_3=-2-6\sqrt{2}$ et $a_4=16z_4^3-32z_4=6\sqrt{2}-2$.

FIN