الأولمبياد الوطنية للرياضيات

مقترح حلول تمارين الامتحان التحضيري
التصفيات الجهوية

29 فبراير 2008
المدة: 4 ساعات ونصف

التمرين الأول: 5 نقط

بسط :

$$A=\frac{a(-b+c-a)^2-b(c+a+b)^2+c(a-b-c)^2+(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}{a^2(-b+c-a)+b^2(c+a+b)+c^2(a-b-c)-(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)}$$

حل أول للتمرين الأول:

نلاحظ أنه في العبارة المعطاة عند إبدال العدد b بنظيره $-b$ نحصل على عبارة متجانسة في البسط وأخرى متجانسة في المقام؛ لذلك نضع: $a=x$ ، $b=-y$ و $c=z$ فنجد:

$$A=F(x,y,z)=\frac{x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2+(y+z-x)(z+ax-y)(x+y-z)}{x^2(y+z-x)+y^2(z+x-y)+z^2(x+y-z)-(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$$

$$A=\frac{N(x,y,z)}{D(x,y,z)}$$

نلاحظ أن : $N(0,y,z)=0$ و $N(x,0,z)=0$ و $N(x,y,0)=0$ ومنه نستنتج أن البسط قابل للقسمة على كل من x و y و z فهو قابل للقسمة على xyz. وبما أن البسط $N(x,y,z)$ كثير حدود متجانس من الدرجة الثالثة فحتما يكون $N(x,y,z)=\alpha xyz$ حيث α حقيقي غير معدوم.

وبما أن $N(1,1,1)=4$ فإن $\alpha=4$ ومنه فإن $N(x,y,z)=4xyz$.

بطريقة مشابهة نجد أن المقام $D(x,y,z)=2xyz$.

نستنتج مما سبق أن $A=2$.

حل ثان للتمرين الأول:

ننطلق من العبارة المعطاة و ننشر ثم نختصر كلا من البسط $N(a,b,c)$ والمقام $D(a,b,c)$ فنجد:

$$N(a,b,c)=a(-b+c-a)^2-b(c+a+b)^2+c(a-b-c)^2+(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)$$
$$=-4abc$$
$$D(a,b,c)=a^2(-b+c-a)+b^2(c+a+b)+c^2(a-b-c)-(-b+c-a)(c+a+b)(a-b-c)$$
$$=-2abc$$

ومنه نجد $A=2$.

التمرين الثاني: 5 نقط

حل المعادلة التالية:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}}}}=x$$

2008 خط كسر

حل للتمرين الثاني:

نلاحظ أنه عند تمديد الكسر بطابق (خط كسر) إضافي ليصبح فيه 2009 خط كسر نكون عوضنا عن x الموجود في الأسفل بالعبارة $1+\frac{1}{x}$ ؛

وأن المعادلة $E(1)\ :\ 1+\frac{1}{x}=x$ تكافئ $E(2)\ :\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}=x$ ....

وهكذا حتى نجد المعادلة المقترحة $E(2008)$.

المعادلة $E(1)\ :\ 1+\frac{1}{x}=x$ تكافئ $x^2-x-1=0$ وحلاها هما:

العدد الذهبي $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ومرافقه $\varphi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

التمرين الثالث: 5 نقط

أنشئ مثلثا ABC قائما في A ؛ بمعرفة الوتر $BC=a$ ، وعلما أن $AI^2=AB\times AC$ حيث I هي منتصف $[BC]$.

حل للتمرين الثالث:

نـهدف إلى تحديد وضعية النقطة A انطلاقا من المعطيات؛

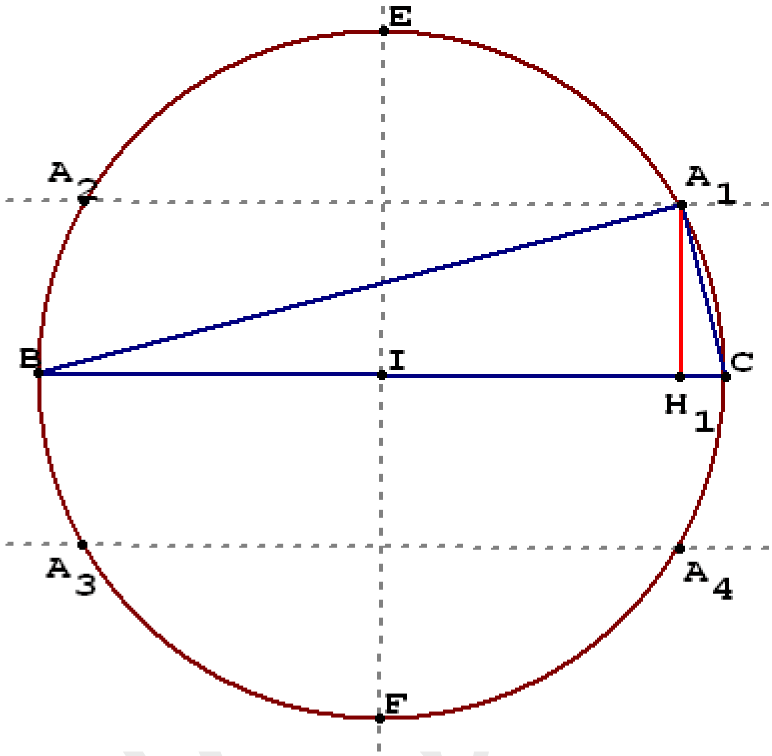
نعلم أن A تقع على الدائرة (C) ذات القطر $[BC]$ ومنه فإن $AI^2=\frac{BC^2}{4}=\frac{a^2}{4}$.

وبما أن $AI^2=AB\times AC$ فإن $AB\times AC=\frac{a^2}{4}$.

لتكن النقطة H قدم الارتفاع المنشأ من A في المثلث ABC ؛

نعلم أن $AB\times AC=AH\times BC$ ومنه نجد $AH\times BC=\frac{a^2}{4}$ إذن $AH=\frac{a}{4}$.

لإنشاء النقطة A ننشئ الدائرة (C) والمستقيم (Δ) واسط القطعة $[BC]$ الذي يقطع الدائرة (C) في نقطتين E و F.
عندئذ فإن واسطي القطعتين $[EI]$ و $[FI]$ يقطعان الدائرة (C) في أربع نقط تمثل وضعيات محتملة للنقطة A (أربعة حلول).



حل ثان للتمرين الثالث:

من العلاقة $AI^2=\frac{BC^2}{4}$ نجد أن $AB\times AC=\frac{BC^2}{4}$ ويمكن أن نكتب: $2\frac{AC}{BC}\times\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}$ أي أن $2\sin\hat{B}\times\cos\hat{B}=\frac{1}{2}$

ومنه $\sin 2B=\frac{1}{2}$ إذن $2B=30°$ ومنه $B=15°$ وفي هذه الحالة يكون $C=75°$.

وباعتبار توجيهين محتملين للمثلث ABC نحصل على وضعيتين للنقطة A؛ وبالمبادلة بين قياسي B و C نحصل على وضعيتين أخريين (بالتناظر) للنقطة A فنحصل على أربعة حلول للمسألة.

حل ثالث للتمرين الثالث:

لتكن النقطة H قدم الارتفاع المنشأ من A في المثلث ABC؛ لدينا $\frac{BC^2}{4}=AB\times AC=AI^2$، ونعلم أن $\frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}$

ومنه $AB\times AC=AH\times BC$ إذن $AH\times BC=\frac{BC^2}{4}$ أي أن $\frac{AH}{BC}=\frac{1}{4}$ أي أن $\frac{AH}{2AI}=\frac{1}{4}$ أي أن $\frac{AH}{AI}=\frac{1}{2}$؛

وباعتبار المثلث ABC ذا زوايا حادة (حالة $H\in[IB]$) فإن $AIB=30°$؛ نمثل هذه الوضعية للنقطة A ونستنتج منه ثلاث وضعيات حلول أخرى هي نظائر ها حول I، حول (BC) وحول واسط $[BC]$؛ تمثل حلولا للمسألة.

التمرين الرابع: 5 نقط

رقمت صفحات كتاب من 1 إلى n؛ من اليمين إلى اليسار. الصفحة التي تحمل الرقم 1 توجد في اليمين. نقوم بجمع أرقام كل صفحات هذا الكتاب فنحصل على مجموع يساوي 2009. إلا أن صفحتين من الكتاب بقيتا متلاصقتين ولم يحسب رقماهما. ما هو عدد صفحات الكتاب؟ وما هي أرقام الصفحات المتلاصقة؟

<u>حل للتمرين الرابع:</u>

ليكن n عدد صفحات الكتاب مع $n \in \mathbb{N}^*$. ترقيم الصفحات من اليمين إلى اليسار (الكتاب العربي) و الصفحة التي تحمل الرقم 1 توجد في اليمين (في النسخة الفرنسية ترقيم الصفحات من اليسار إلى اليمين و الصفحة التي تحمل الرقم 1 توجد في اليسار). الصفحتان المتلاصقتان هما صفحة يمنى (يسرى في النسخة الفرنسية) تحمل رقما فرديا 2p-1 والمقابلة لها يسرى (يمنى في النسخة الفرنسية) تحمل رقما زوجيا 2p حيث $p \in \mathbb{N}^*$.

مجموع أرقام صفحات الكتاب من 1 إلى n باستثناء الصفحتين المتلاصقتين يساوي 2009؛ إذن:

$$\frac{n(n+1)}{2}-(4p-1)=2009 \qquad (1)$$

وبما أن $2 \le 2p \le n$ فإن $1 \le 2p-1 \le n-1$ ومنه فإن $3 \le 4p-1 \le 2n-1$ أي أن $-2n+1 \le -(4p-1) \le -3$.

نستنتج منه أن: $\frac{n(n+1)}{2}-2n+1 \le \frac{n(n+1)}{2}-(4p-1) \le \frac{n(n+1)}{2}-3$

إذن: $\frac{n^2-3n+2}{2} \le 2009 \le \frac{n^2+n-6}{2}$

ومنه:

$$\begin{cases} n^2-3n-4016 \le 0 & (2) \\ n^2+n-4024 \ge 0 & (3) \end{cases}$$

المتراجحة (2) تؤدي إلى أن $n \le \frac{3+\sqrt{16073}}{2}$ ومنه $n \le 64,88$.

المتراجحة (3) تؤدي إلى أن $n \ge \frac{-1+\sqrt{16097}}{2}$ ومنه $n \ge 62,94$.

ومنه $62,94 \le n \le 64,88$ إذن يوجد حلان $n_1=63$ و $n_2=64$.

من العلاقة (1) نجد $2p=\frac{n(n+1)}{4}-1004$ ومنه:

في حالة عدد الصفحات $n=63$ نجد $2p=\frac{63\times 64}{4}-1004=4$ وتكون الصفحتان المتلاصقتان هما 3 و 4.

في حالة عدد الصفحات $n=64$ نجد $2p=\frac{64\times 65}{4}-1004=36$ وتكون الصفحتان المتلاصقتان هما 35 و 36.