الأولمبياد الوطنية للرياضيات

مقترح حلول تمارين امتحان التصفيات النهائية

اليوم الأول

16 مارس 2008

المدة: 4 ساعات ونصف

<u>التمرين الأول</u>

لتكن $f_1(x)=\frac{1+x}{1-x}$ و لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ نضع: $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$.   احسب $f_{2008}(2008)$.

<u>حل للتمرين الأول</u>

لدينا $f_1(x)=\frac{1+x}{1-x}$ و منه:

$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\frac{1+\frac{1+x}{1-x}}{1-\frac{1+x}{1-x}}=\frac{-1}{x}$$

كذلك:

$$f_3(x)=f_1(f_2(x))=\frac{1+f_2(x)}{1-f_2(x)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{-1}{f_1(x)}$$

$$f_4(x)=f_1(f_3(x))=\frac{1+f_3(x)}{1-f_3(x)}=\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=x$$

ومنه نجد $f_5(x)=f_1(x)$؛ إذن f دورية و دورها 4 ويكون لكل n : $f_{n+4}(x)=f_n(x)$ و $f_{4n}(x)=f_4(x)$

ومنه $f_{2008}(x)=f_{4\times 502}(x)=x$ إذن : $f_{2008}(2008)=2008$.

التمرين الثاني

نعلم أن الواسطات في أي مثلث متلاقية في نقطة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث.
انطلاقا من ثلاثة مستقيمات من المستوي معطاة ومتلاقية في نفس النقطة؛ أنشئ مثلثا تكون هذه المستقيمات الثلاثة هي واسطاته.

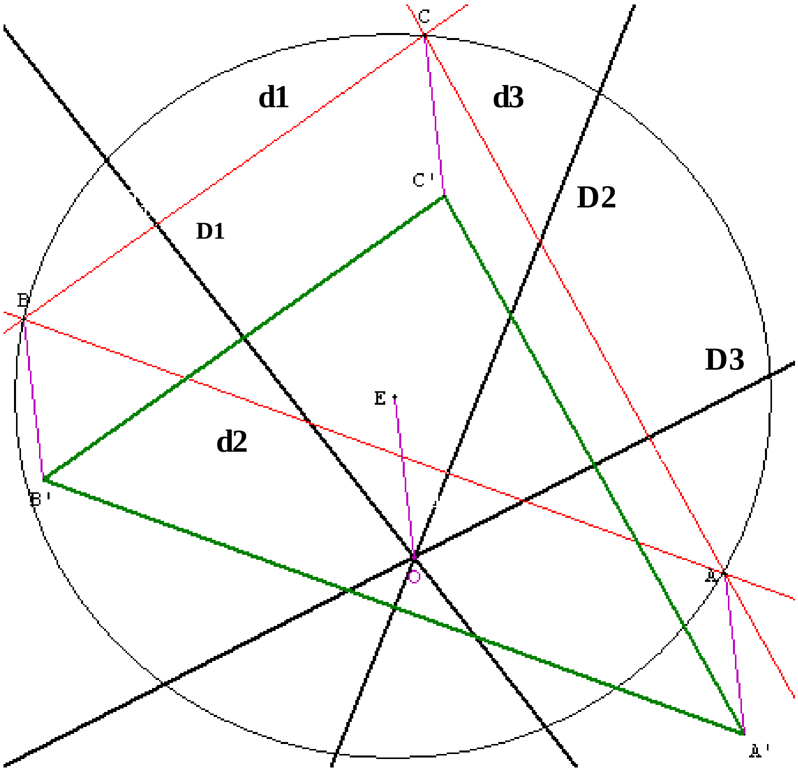
حل للتمرين الثاني

لتكن D_1 ؛ D_2 و D_3 ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة O.

ننشئ ثلاثة مستقيمات متلاقية مثنى مثنى d_1 ؛ d_2 و d_3 بحيث : $d_1 \perp D_1$ ؛ $d_2 \perp D_2$ و $d_3 \perp D_3$.

لتكن A ؛ B و C نقاط تلاقي هذه المستقيمات. نسمي E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

صورة المثلث ABC بواسطة الإزاحة ذات المتجه $\overrightarrow{EO}$ هي حل للمسألة المطروحة.



التمرين الثالث

أوجد كل قيم الوسيط الحقيقي a التي من أجلها تقبل المعادلة:

$$16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16=0$$

أربعة حلول حقيقية مختلفة تشكل متتالية هندسية.

حل للتمرين الثالث

نضع : $P(x)=16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16$

لتكن x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 و x_4 الحلول المفترضة للمعادلة: (1) $\quad P(x)=0$ ؛

و ليكن q أساس المتتالية الهندسية ذات الحدود : x_1 ؛ x_2 ؛ x_3 و x_4 .

لدينا $x_2=qx_1$ ؛ $x_3=q^2x_1$ و $x_4=q^3x_1$.

بما أن الحلول مختلفة فإن $x_1\neq 0$ و $q\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

من جهة أخرى لدينا $P(\frac{1}{x})=\frac{P(x)}{x^4}$ و منه فإذا كان x حلا للمعادلة (1) فإن $\frac{1}{x}$ يكون كذلك حلا لها.

حلول المعادلة (1) هي x_1 ؛ $x_2=qx_1$ ؛ $x_3=q^2x_1$ و $x_4=q^3x_1$ و هي أيضا $\frac{1}{x_1}$ ؛ $\frac{1}{qx_1}$ ؛ $\frac{1}{q^2x_1}$ و $\frac{1}{q^3x_1}$.

وبترتيب مناسب فإن هذه الحلول تتطابق كما يلي: $x_1=\frac{1}{q^3x_1}$ ؛ $x_2=\frac{1}{q^2x_1}$ ؛ $x_3=\frac{1}{qx_1}$ و $x_4=\frac{1}{x_1}$ ؛

نستنتج منه أن: $x_1^2q^3=1$. إذن $q=x_1^{-\frac{2}{3}}$.

لذلك يمكن كتابة الحلول بدلالة x_1 على الشكل التالي: x_1 ؛ $x_2=x_1^{\frac{1}{3}}$ ؛ $x_3=x_1^{-\frac{1}{3}}$ و $x_4=x_1^{-1}$.

ويمكن كتابة $P(x)$ على الشكل: $\quad P(x)=16(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

وبالنشر والاختصار نجد:

$$P(x)=16\left[x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3x_4)x^2-(x_1+x_2+x_3+x_4)x+x_1x_2x_3x_4\right].$$

وبالمطابقة نجد: $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a}{16}$

و منه: (2) $\quad x_1+x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{-\frac{1}{3}}+x_1^{-1}=\frac{a}{16}$.

وبالمثل: (3) $\quad x_1^{\frac{4}{3}}+x_1^{-\frac{4}{3}}+x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{-\frac{2}{3}}+2=\frac{2a+17}{16}$.

بوضع $z=x_1^{\frac{1}{3}}+x_1^{-\frac{1}{3}}$ و من (2) نجد: $(2')$ $\quad z^3-2z=\frac{a}{16}$

و من (3) نجد: $(3')$ $\quad z^4-2z^2=\frac{2a-15}{16}=2\frac{a}{16}-\frac{15}{16}$.

بتعويض $\frac{a}{16}$ بالعبارة z^3-2z في $(3')$ نجد: (4) $\quad z^4-2z^3-3z^2+4z+\frac{15}{16}=0$.

هذه المعادلة تكافئ $16z^4-32z^3-48z^2+64z+15=0$ أي $(4z^2-4z-15)(4z^2-4z-1)=0$.

و منه فإن الحلول هي: $\quad z_1=-\frac{3}{2}$ ؛ $z_2=\frac{5}{2}$ ؛ $z_3=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ و $z_4=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

لدينا أن $a=16z^3-32z$ إذن قيم هي:

$a_1=16z_1^3-32z_1=-6$ ؛

$a_2=16z_2^3-32z_2=170$ ؛

$a_3=16z_3^3-32z_3=-2-6\sqrt{2}$ ؛

و $a_4=16z_4^3-32z_4=6\sqrt{2}-2$.