الأولمبياد الوطنية للرياضيات

مقترح حلول تمارين امتحان التصفيات النهائية

اليوم الثاني

17 مارس 2008

المدة: 4 ساعات ونصف

التمرين الرابع

املأ الفراغات في الإطار التالي بأرقام بحيث تكون كل العبارات داخل الإطار صحيحة.

في هذا الإطار فإن:
عدد مرات ظهور الرقم 0 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 1 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 2 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 3 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 4 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 5 هو ...... بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 6 هو ...... بالضبط

حل للتمرين الرابع

في هذا الإطار فإن:
عدد مرات ظهور الرقم 0 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 1 هو 4 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 2 هو 3 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 3 هو 2 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 4 هو 2 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 5 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 6 هو 1 بالضبط

حل ثان أبسط للتمرين الرابع

في هذا الإطار فإن:
عدد مرات ظهور الرقم 0 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 1 هو 7 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 2 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 3 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 4 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 5 هو 1 بالضبط
عدد مرات ظهور الرقم 6 هو 1 بالضبط

التمرين الخامس

عند حساب العبارة: $x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}$ **باستخدام آلة حاسبة**
وجدنا $x=2.99999999999999$.

احسب القيمة المضبوطة للعدد x ؟

حل للتمرين الخامس:

بوضع $t=\sqrt{\frac{847}{27}}$ نجد $x=\sqrt[3]{6+t}+\sqrt[3]{6-t}$

و بتكعيب الطرفين نجد: $x^3=6+t+3\sqrt[3]{(6+t)^2(6-t)}+3\sqrt[3]{(6+t)(6-t)^2}+6-t$

$$x^3=12+3\sqrt[3]{(6+t)(36-t^2)}+3\sqrt[3]{(6-t)(36-t^2)}$$

$$x^3=12+3\sqrt[3]{36-t^2}\,(\sqrt[3]{6+t}+\sqrt[3]{6-t})$$

$$x^3=12+\left(3\sqrt[3]{36-\frac{847}{27}}\right)x$$

$$x^3=12+\left(3\sqrt[3]{\frac{125}{27}}\right)x$$

ومنه: $x^3-5x-12=0$

نلاحظ أن $x_0=3$ **هو حل بديهي للمعادلة** $x^3-5x-12=0$ **ومن التفكيك** $x^3-5x-12=(x-3)(x^2+3x+4)$ ؛

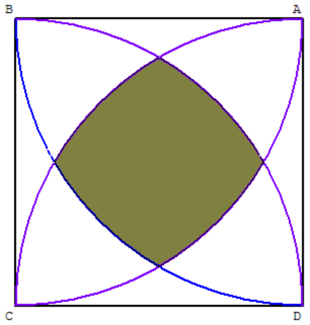
بحساب مميز المعادلة $x^2+3x+4=0$ **نجد** $\Delta=-7$ **أي أنها لا تقبل حلا في** $\mathbb{R}$ ؛

إذن المعادلة $x^3-5x-12=0$ **تقبل حلا وحيدا في** $\mathbb{R}$ **هو** $x_0=3$ **ومنه فإن** $x=x_0$ ؛

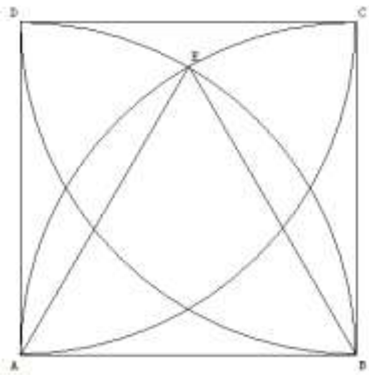
إذن: $\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3$

التمرين السادس

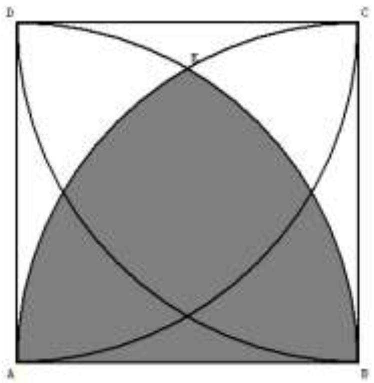
في الشكل المقابل: **ABCD** مربع طول ضلعه **a**
و المنحنيات الواصلة بين رؤوسه المتقابلة هي
أرباع دوائر.
احسب المساحة المظللة بدلالة **a**.



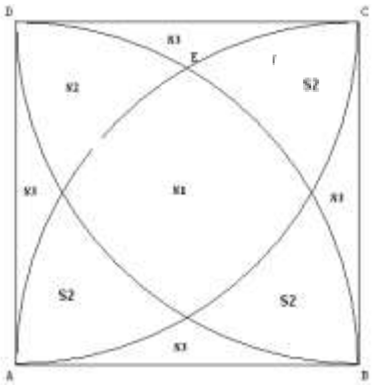
حل أول للتمرين السادس:



الشكل1



الشكل2



الشكل3

في الشكل 1: فإن مساحة القطاع الدائري **(ABE)** هي: $A_1 = \frac{1}{6}\pi a^2$ و مساحة المثلث متساوي الأضلاع **ABE** هي: $S_{ABE} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. ومساحة القطاع الدائري **(BCA)** هي ربع مساحة دائرة وتساوي $S_{BCA} = \frac{1}{4}\pi a^2$

في الشكل 2: المساحة المظللة هي: $A_2 = 2A_1 - S_{ABE} = \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و منه فإن: $A_2 = (\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2$.

في الشكل 3: مساحة المربع مقسمة إلى 9 أجزاء وتحقق مل يلي:

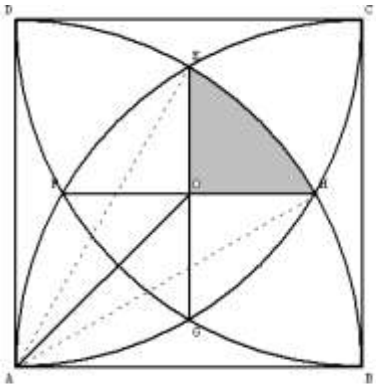
$$\begin{cases} A_2 = S_1 + 2S_2 + S_3 & (1) \\ S_{ABCD} = S_1 + 4S_2 + 4S_3 & (2) \\ S_{(BCA)} = S_1 + 3S_2 + 2S_3 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + 2S_2 + S_3 = (\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4})a^2 & (1) \\ S_1 + 4S_2 + 4S_3 = a^2 & (2) \\ S_1 + 3S_2 + 2S_3 = \frac{\pi}{4}a^2 & (3) \end{cases}$$

من **(1)-(3)** نجد $S_2 + S_3 = (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12})a^2$.

من (2) نجد $S_1 + 4(S_2 + S_3) = a^2$ وعليه فإن المساحة المطلوبة هي: $S_1 = a^2 - 4(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12})a^2$ ؛

إذن: $S_1 = a^2(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$



حل ثان للتمرين السادس

المساحة A_0 المظللة في الشكل المقابل تساوي ربع المساحة المطلوبة S_1 ولدينا:

$$\begin{cases} BAE = \frac{\pi}{3} \\ BAO = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ومنه $OAE = HAO = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ ؛

إذن: $HAE = \frac{\pi}{6}$.

المساحة A_0 للمنطقة المظللة EOH تساوي الفرق بين المساحة A_1 للقطاع الدائري HAE و ضعف المساحة A_2 للمثلث OAE.

لدينا :

$$A_1 = \frac{\pi}{12}a^2 \text{ ؛}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} AH \times AO \times \sin(\frac{\pi}{12})$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{6})}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{4} \times \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$A_2 = \frac{a^2}{4} \times \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a^2}{4} \times \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}}$$

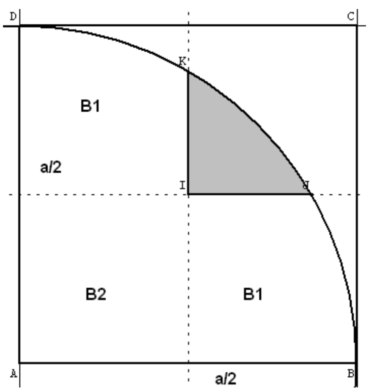
$$= \frac{a^2}{4} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{a^2}{8} \times (\sqrt{3} - 1)$$

$$A_2 = \frac{a^2}{8} \times (\sqrt{3} - 1)$$

وتكون المساحة المظللة هي: $A_0 = A_1 - 2A_2$

$$A_0 = \frac{a^2}{4}(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1)$$

و بما أن: $S_1 = 4A_0$ فإن $S_1 = a^2(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$.



حل ثالث للتمرين السادس

ننسب المستوى إلى مرجع قائم ومنتظم $(A; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$.

نعتبر المساحة المظللة A_0 في الشكل المقابل؛ إضافة إلى المساحات المبينة على الشكل.

نعلم أن معادلة الدائرة (C) ذات المركز A و الشعاع a هي: $x^2+y^2=a^2$ و منه $B1+B2=\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}dx$.

بوضع $x=a\sin t$ حيث $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ في التكامل السابق نجد:

$$\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ dx=a\cos t\,dt \end{cases}$$

وبالتعويض نجد: $B1+B2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}(a\cos t)dt$

إذن: $B1+B2=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt$

$$B1+B2=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos(2t))dt$$

$$B1+B2=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}).$$

لدينا أن ربع مساحة الدائرة (C) هو: $A_0+2B1+B2=\frac{\pi}{4}a^2$ و منه فإن: $A_0=\frac{\pi}{4}a^2-2(B1+B2)+B2$ وبملاحظة أن $B_2=\frac{1}{4}a^2$ فإن $A_0=\frac{\pi}{4}a^2-\frac{a^2}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})+\frac{a^2}{4}$ ومنه $A_0=\frac{a^2}{4}(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1)$. وبما أن المساحة المطلوبة هي و بما أن: $S_1=4A_0$ فإن $S_1=a^2(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3})$.