# Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

**3$^e$ tour** | **Niveau 7C** | **25 mars 2018**
**Durée 4 h**

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;*
*Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;*
***Calculatrice non autorisée***

## Exercice 1 : (20 points)

1° Montrer que $\forall x \in ]1;+\infty[$ on a : $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2° En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \ln k < \frac{\sqrt{n!}}{n}$

## Exercice 2 ; (20 points)

On considère l'équation (E) : $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$ où $(x, y)$ sont des entiers relatifs.

1° Donner une solution particulière de (E).

2° Montrer que pour tout couple $(x, y)$ solution de l'équation (E), si $x \neq 0$ alors $x \geq 3$ et $y = 2^{x-1} \times m + n$ (avec $m$ impair et $n = 1$ ou $n = -1$).

3° Déterminer tous les couples $(x, y)$ d'entiers relatifs qui vérifient l'équation (E).

## Exercice 3 : (20 points)

On considère l'intégrale : $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\,dy$, pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1° Montrer que : $\varphi(x) = 2\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) - x\ln 2$.

2° En prolongeant $\varphi$ par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ trouer alors la valeur exacte de $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

## Exercice 4 : (20 points)

1° Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

2° Trouver l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système :

$$\begin{cases} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = 8\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = 8\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \end{cases}$$

## Exercice 5 : (20 points)

Un octogone convexe $A_1A_2A_3...A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul. $A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5. $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4. Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

**FIN.**